昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2012年 11 月 1 日発行　第50巻 11 号　毎月 1 回 1 日発行

ISSN 0386—2240

# 数理科学

11
2012

## 特集 物理と数学における厳密解
### 自然現象の解明に向けて

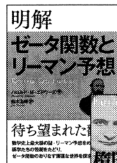




No.593

サイエンス社

## 明解 ゼータ関数とリーマン予想 新刊




H. M. エドワーズ・著　鈴木 治郎・訳

A5・365 頁・定価 4,725 円（税込）

天才数学者たちが探求したゼータ関数の理論を、基本から一歩ずつ解説した一冊。この名著を本邦初の翻訳で日本の読者に贈り出す。数学史上最大級の未解決問題「リーマン予想」を理解するための必携の書。

ISBN978-4-06-155799-4

## ヤコビ楕円関数原論 新刊




カール G. J. ヤコビ・著　高瀬 正仁・訳

A5・254 頁・定価 8,190 円（税込）

世界初の翻訳で世に問う、楕円関数論の源流たる名著！天才数学者ヤコビの主著「フンダメンタ・ノヴァ」を、ラテン語原典から完全翻訳。現代数学に底流する楕円関数論の理解のために、全ての研究者・数学ファンに贈る一冊。

ISBN978-4-06-156504-3

## はじめての統計15講 新刊

小寺 平治・著　A5・134 頁・定価 2,100 円（税込）




中学レベルの数学知識を前提として、Σを使わないなど、レベルに配慮し、内容を１５節にわけ、授業で使いやすいように工夫した。最新の統計データを用いながら具体的に学ぶ。

ISBN978-4-06-156501-2

## 今度こそわかる ゲーデル不完全性定理 新刊




本橋 信義・著　A5・171 頁・定価 2,835 円（税込）

数理論理学を初学者に教えれば右に出る者のない著者が、わかりやすい言葉遣いで説く。初学者が不完全性定理を一歩ずつ着実に理解できるように心がけた、新しい入門書。

ISBN978-4-06-156506-7

## 単位が取れる微積エッセンス 新刊

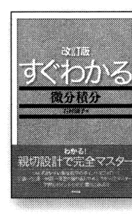
齋藤 寛靖・著　ISBN978-4-06-154485-7

A5・183 頁・定価 2,310 円（税込）

東京都文京区音羽 2-12-21　講談社　編集部 ☎03(3235)3701
http://www.kspub.co.jp/　販売部 ☎03(5395)3622

■ 高校数学と大学数学との溝を埋める定番テキスト

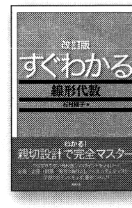
## 改訂版 すぐわかる微分積分




◎石村園子 著／A5判／定価2310円

定義→定理→例題→演習のパターンのくり返しで無理なく理解。
高校の微分積分を復習しながら大学の微分積分を学ぶのに最適な一冊。

## 改訂版 すぐわかる線形代数

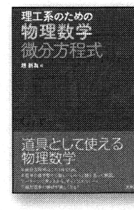



◎石村園子 著／A5判／定価2310円

高校数学とのギャップを埋めてくれる定番テキスト。数学が苦手でも、定義→定理→例題→演習のパターンのくり返しで無理なく理解。

■ 道具として使える物理数学！

## 理工系のための物理数学 微分方程式




◎趙　新為 著／A5判／定価2310円

力学・解析力学で必要な常微分方程式のマスターはこれ１冊で過不足なし。
十分に使いこなして楽しもう。簡単な標準形から順を追って解説。

（定価税込）　振替口座＝00140-4-13803
〒102-0072　東京都千代田区飯田橋3-11-19
東京図書
TEL 03(3288)9461 FAX 03(3288)9470
URL http://www.tokyo-tosho.co.jp

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 593 November 2012

# 物理と数学における厳密解

## 自然現象の解明に向けて





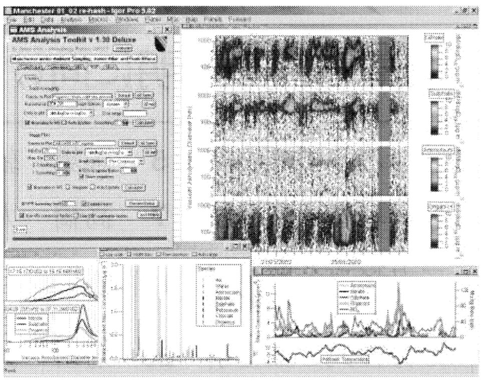


表紙：戸川　隼人

■広告企画■

# 科学技術計算・ビジュアリゼーションソフト最前線

## グラフ作成・解析環境の統合ソフトウエア IGOR Pro（イゴール・プロ）英語版／日本語版



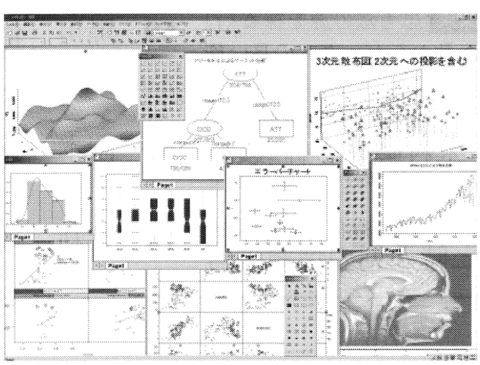
IGOR Proは、グラフ作成、データ解析、プログラミングツールをひとつに統合した科学者やエンジニアのための拡張性の高いパワフルなツールです。
・出版品質のグラフィックを作成できます。EPS等、高解像度の画像形式で出力することもできます。
・テキスト、標準バイナリ、Excel、JCAMP、MatLabデータなど、幅広い種類の形式のデータファイルをインポートできます。
・任意の数のグラフやテーブルを任意の幅で複数同時に表示できます。また、10万ポイントを超える大規模なデータでも高速に処理できます。文字列データ、内部8形式の数値データ、および4次元までのデータに対応しています。
・グラフ機能においては、各曲線はそれぞれ独自の色、太さ、スタイルに設定できます。曲線上にある各ポイントの線の色、マーカーのサイズや形状は、他のデータの値を利用することもできます。グラフの中に表示できる曲線、軸、注釈、等高線、写真、画像の数に制限はありません。
・フーリエ、ウェーブレット、Hough変換。無制限の独立変数を伴う組み込み関数又はユーザー定義関数への線形/非線形回帰曲線、微分、積分、常微分方程式、重畳（コンボリューション）、ヒストグラム、スムージング、数学的表現による評価、多くのLAPACKルーチンを利用した行列演算、信号測定、疎データまたは行列データの等高線化、偽カラー表示、などの解析機能を持っています。
・動作環境：Windows/MacOSX

**■問い合わせ先■**

**株式会社ヒューリンクス**

〒103-0015 東京都中央区日本橋箱崎町5-14
TEL03-5642-8380　FAX03-5642-8381
E-mail:soft.sales@hulinks.co.jp
URL:http://www.hulinks.co.jp/

## 汎用データ解析ソフトウエア S−PLUS



S−PLUSは高度で最新の解析手法と豊富なグラフィックスを備え、様々な分野で利用できる汎用データ解析ソフトウエアです。データの整理、加工、抽出から各種解析、グラフ出力まで研究開発を一貫して支援いたします。世界中の数多くの研究開発機関、教育機関での導入実績を誇ります。
・4000種類以上の高度で最新の解析手法を標準で備えています。（基本演算、行列演算、線形代数、シミュレーション、多変量解析、回帰分析、分散分析、線形モデル、医薬生物統計、検定、時系列解析、OR、ニューラルネット他）
・3Dプロットを含む高品質で多種のグラフィックスを備え、グラフのカスタマイズも自由自在です。
・米国ベル研究所で開発されたオブジェクト指向データ解析言語「S」を備え、解析手法のカスタマイズや新規開発、プログラミングが手軽に行えます。
・OLEやODBC等のインターフェースを備え、他ソフトウエアとの連携動作が可能、入出力も様々なアプリケーション、画像フォーマットに対応します。
・データ解析WEBサービスが構築できるサーバソフトウエアS-PLUS Enterprise Serverもございます。
・通常のトレーニングコース、強力なサポート体制で研究を側面支援いたします。
・Windows/Linux/主要UNIXに対応、64bit版で大規模データにも対応しています。

**■問い合わせ先■**

**株式会社数理システム**

〒160-0022 東京都新宿区新宿 2-4-3
フォーシーズンビル 10F
TEL03-3358-6681　FAX03-3358-1727
E-mail:splus-info@msi.co.jp
URL:http://www.msi.co.jp/splus/

November 2012 MATHEMATICAL SCIENCES Number 593

特集／物理と数学における厳密解

# 徒然なるまま厳密解

国場 敦夫

厳密解と聞くと，厳しい世界だなあと感じてちょっと後ずさりしたくなるだろうか，それともワクワクするだろうか．筆者はその両方である．そもそも「厳密」という言葉がいかめしい．数学で「解」と言えばほぼ自動的に厳密解なのであって，本来わざわざ「厳密」をつける必要はない．この言葉はあまたの近似解，手法が試される物理で生まれたに違いない，そう割り切って単に「解」で良いのではないかというと，これもあっさりし過ぎの感がある．「厳密解」と呼ぶとき，それは単に近似と峻別するためだけでなく，その見事さ，初めて達成した先人に対する敬意，波及した歴史的意義などに思いをはせる気持ちが働くためだろうか．

ともあれ，そのような厳密解は物理のほぼすべての分野に存在し，珠玉の名画のように鑑賞する人を魅了する．本特集号では，古くから知られ教科書にも記載されるものから現在進行中の研究対象まで，典型的な例を集めてみた．分野と時代を超えて，先人の炯眼と研究の最前線を楽しんでいただければ幸いである．ここでは厳密解というテーマについて，つれづれなるまま心に移り行くよしなしごとを，そこはかとなく書きつくるとしよう．

まずは，一口に厳密解と言ってもその意味するところは実に多彩であることだ．一番代表的なのは「... 方程式」の厳密解というものだが，「... 模型」や「... 理論」の厳密解というものもある．これは計算すべき物理量，例えば分配関数や相関関数などが「求まった」という状況である．ところがこの「求まった」とはどういうことなのか，数学的な定義は存在しない．「解析的に」とか「閉じた形で」などと大らかに表現されることもあるが，本当に「求まった」と思うかはそれに関わる人々が如何に非自明で有用な結果であると考えるかに依っている．極端な話，例えば分配関数を $Z = \sum e^{-\beta E}$ と書き，この式は何処にも近似はなく閉じている，と言って厳密解と呼ぶ人はいない．しかしこの状態和を何処までどのように還元できたら厳密解と呼ぶべきかとなると，その基準は定まっているわけでなく，色々な考え方があり得る．このような問いは，価値観や審美観に訴え始めると不毛な議論に陥るが，一方で計算量・タスクの評価による定量的考察を試みることは一興である．

「... 模型」の厳密解という場合，もう一つ留意すべきは，分配関数は求まっても相関関数は求まっていない，あるいは基底状態は求まっても励起状態はそうはいかない，などといった事情があることだ．「... 方程式」の厳密解も，一般解のこともあれば特殊解の場合もある．筆者の研究分野（可積分系）では，「模型は未だ構成されていないが解は知られている」といったことまで起こる．

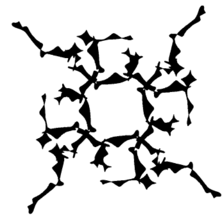
exact solution は rigorous かという問いもある．これを和訳すると「厳密解は厳密か」となって

しまうので，解像度の高い英語に拠った．実は数学的に rigorous とまではいえないまでも物理学者なら十分それで納得・満足という所謂 “physicist’s proof” があれば厳密解と呼ぶことが多い．忙しい物理学者は rigorous proof を待っていられないのである．exact と rigorous は不分離に共立するカルチャーであり，前者は主に結果自体の発見やその審美性に，後者は導出や証明に完璧を期すことに優先的信条があるようだ．余談になるが，ハミルトニアン等を直接数値的に対角化することを，その業界では exact diagonalization と呼ぶそうだ．慣習，カルチャーの多様性を認識させられる．

厳密解は役立つが，仮にそれがなくても多くの物理現象は理解でき，定量的にも説明できるだろう．それでも本号のような特集が組まれるのはなぜか．厳密解が Phys や Math に加えて Art として，いとたのもしうをかしけれ，であるからかもしれない．本号により，多くの読者にその様々な魅力が伝われば幸いである．

（くにば・あつお，東京大学大学院総合文化研究科）

# 振動現象と厳密解



高橋　大輔

## 1. 解より始めよ

本特集のキーワードである厳密解が何を意味するかは人によって異なるであろう．例えば有限の手続きで無限精度の値が得られるものを厳密解と考える人もいれば，方程式に一意に解が存在することを示せばそれを厳密解と考える人もいるであろう．本稿では，数学公式集に載っているような，三角関数や指数関数などの初等関数あるいは楕円関数やベッセル関数などの特殊関数といった名前の付いた関数で表現できる解のことを厳密解ということにしよう．

では，厳密解がわかれば何がうれしいのであろうか．解を名前の付いた関数で表現できるということは，昔からいろいろ調べ尽くされてきた数学的オブジェクトに問題が還元したということであり，問題が完全に解けたことに近い．厳密解のおかげで，対象とする現象が手に取るようにわかるのである．さらに，それら数学的オブジェクトを知悉しているだけに，その限界もよく知っている．すると厳密解は，その問題を一般化したり抽象化したりする際の大切な元手にもなる．つまり厳密解は終着点と同時に出発点でもある．

さて，本稿では厳密解をもつ振動現象について紹介する．振動にもいろいろなタイプがあり，それらがどのような方程式で書かれ，どのような厳密解となって描写されるであろうか．なお，なるべくすっきりした式表現にするため，登場する方程式の物理係数は最初から単純なものを選んでいることをお断りしておく．

## 2. 元気な振動

最初の例として単振動の方程式

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) \tag{1}$$

を取り上げよう[1)]．時刻 $t$ を $t \to \sqrt{m/k}\,t$ とスケール変換すると係数が単純になり

$$\ddot{y} = -y$$

が得られる．この方程式の両辺に $\dot{y}$ を掛けると

$$\dot{y}\ddot{y} = -y\dot{y}$$

となるが，

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{y}^2}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dt}$$

に等しい．したがって $E$ を時間によらない任意定数として

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}y^2 = E \tag{2}$$

が導かれる．左辺は運動エネルギーとバネのポテンシャルエネルギーの和，すなわち系の全エネルギーを表しており，それが時間によらない定数となるので，この式は**エネルギー保存則**を意味する．さらに，(2) をもう 1 回積分することにより，解 $y(t)$ が以下のように得られる．

$$y(t) = \sqrt{2E}\cos(t - t_0)$$

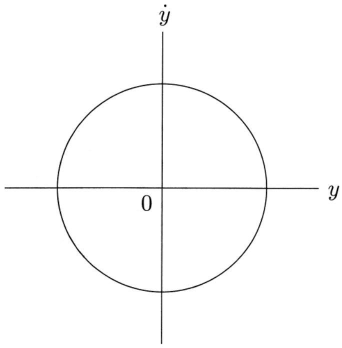



**図 1**　単振動における $y$ と $\dot{y}$ の関係.

$t_0$ は積分定数と同等の任意定数である.

解 $y(t)$ をプロットすれば確かに振動していることがわかるが，厳密解に至る途中に登場したエネルギー保存則 (2) も解について重要な情報を与えている．(2) は $y$ と $\dot{y}$ の関係であるので，横軸に $y$，縦軸に $\dot{y}$ をとり，(2) が表す曲線を描くと，図 1 のように原点を中心とする円が得られる．$y$ と $\dot{y}$ はこの関係から逃れられずに連続的に動き，右回りに動くことも (1) からわかる．解の**軌道**を表現するこのような平面を**相平面**という．

同様に

$$\ddot{y} = f(y)$$

というタイプの方程式なら，$f(y)$ の原始関数を $F(y)$ としてエネルギー保存則が

$$\frac{\dot{y}^2}{2} - F(y) = E \tag{3}$$

となる．$y$ と $\dot{y}$ はこの保存則を守りながら（$F(y)$ によるが）大きくなったり小さくなったり変化し続ける．また (3) は微分方程式で言うところの変数分離形であり，さらに 1 回積分すれば解 $y(t)$ を陽な形で表すことができる．

例として単振り子の振動を表す方程式

$$\ddot{y} = -\sin y$$

を取り上げる．$y(t)$ は振り子のふれ角である．エネルギー保存則は

$$\frac{\dot{y}^2}{2} - \cos y = E \tag{4}$$

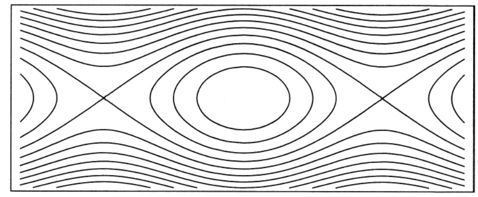


**図 2**　$\dot{y}^2/2 - \cos y$ の等値線.

となる．$E$ をいろいろ変えながら相平面に解の軌道を描いたものを図 2 に示す．中央の閉曲線それぞれは，$y$ と $\dot{y}$ が振動している様子を，上部あるいは下部の波打つ曲線それぞれは，初速度が大きく振り子が一方向にぐるぐる回る様子を示している．解は (4) をもう 1 回積分して得られ，振動の場合ならヤコビの楕円関数 sn と逆正弦関数 arcsin を用いて

$$y(t) = 2 \arcsin(k \,\mathrm{sn}(t; k))$$

と表すことができる（$k$ は sn の母数）.

## 3. へたる振動

今までは右辺が $y$ のみに依存する $\ddot{y} = f(y)$ という方程式を考えたが，$\dot{y}$ にも依存する場合 $\ddot{y} = f(y, \dot{y})$ を考えよう．$\dot{y}$ が方程式に加わることで前節のエネルギー保存則が一般に成り立たない．例えば線形バネの振動に，速度に比例する抵抗が加わった減衰振動の方程式

$$\ddot{y} = -y - \dot{y} \tag{5}$$

を取り上げよう．両辺に $\dot{y}$ を掛けて時間積分すると

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}y^2 = E - \int \dot{y}^2 dt \tag{6}$$

が得られる．左辺の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は，バネが動いている限り ($\dot{y} \neq 0$)，右辺の $-\int \dot{y}^2 dt$ によってどんどん小さくなっていく．厳密解は

$$y(t) = Ae^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}(t - t_0)}{2}$$

であり，振幅が指数的に減少する．相平面での解

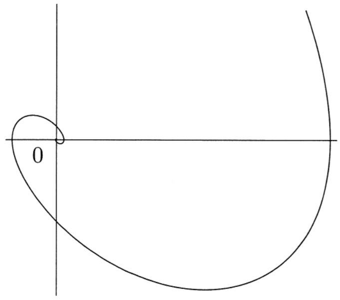



図 3　減衰振動.

の軌道を描くと図 3 のように原点に巻きつく渦巻きになる.

上の例では振動が $t \to \infty$ で完全に静止してしまう. 今度は $y_1(t), y_2(t)$ に関する連立 1 階常微分方程式

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - (y_1^2 + y_2^2 - 1)y_1, \\ \dot{y}_2 = -y_1 - (y_1^2 + y_2^2 - 1)y_2 \end{cases} \tag{7}$$

を考えてみよう. この方程式は, $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = -y_1$, すなわち, $\ddot{y}_1 = -y_1$ ($\ddot{y}_2 = -y_2$) という単振動の方程式に右辺第 2 項の効果を加えたものとみなせる. $L(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t)$ とおくと上式から

$$\dot{L} = 2L(1 - L)$$

が得られ, 一般解が $L(t) = 1/(1 + Ae^{-2t})$ となる. 単振動の場合は $L$ が定数, すなわち保存量であったのに対し, $t$ が増えると $L$ は単調に増加あるいは減少して 1 に収束する. これも解に対する重要な情報であり, このような量は一般に**リャプノフ関数**と呼ばれる. $y_1$ と $y_2$ の関係が $L$ を通じてわかったので厳密解も容易に求められ, 一般解は

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + Ae^{-2t}}} \sin(t - t_0), \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + Ae^{-2t}}} \cos(t - t_0) \end{cases}$$

で与えられる. $y_1$ を横軸に $y_2$ を縦軸にとった相平面内の解軌道の例を図 4 に示す. $A$ が正負どちらの場合も軌道は最後に単位円をグルグル回る. このように $t \to \infty$ で漸近する閉曲線を**極限閉軌道**(リミットサイクル)という.

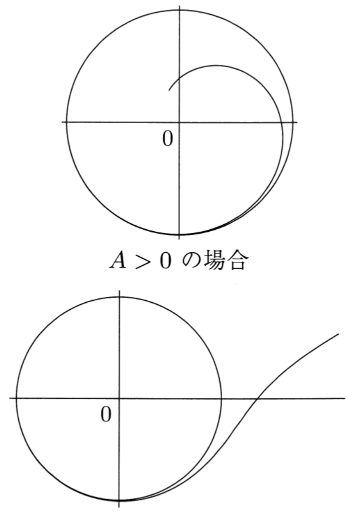



図 4　(7) の解軌道の例.

## 4. フニャフニャする振動

今度はさらに $\ddot{y} = f(y, \dot{y}, t)$ と右辺が $t$ にも依存する場合を考えよう. これを現象から導くために少し準備を行う. まず, 水平面内に張った太鼓の皮の振動を考える. 時刻 $t$, 座標 $(x, y)$ における皮の高さを $u(x, y, t)$ とすると, 運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

で与えられる. 座標を極座標 $r, \theta$ によって書きかえると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

となる. さらに $u(r, \theta, t) = R(r) \cos n\theta \cos \omega t$ ($n$ は非負整数) という変数分離の形を仮定すると, $R$ についての常微分方程式

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\omega^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0$$

が得られる. ここで $r = z/\omega$, $R(r) = y(z)$ という変数変換をほどこすと**ベッセルの微分方程式**

$$y'' + \frac{y'}{z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)y = 0 \tag{8}$$

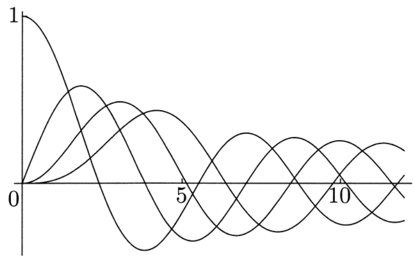



**図 5**　第 1 種ベッセル関数 $J_0(z)$ ～ $J_3(z)$ のプロット．

が導かれる．この解は級数解法によって求めることができ，例えば**第 1 種ベッセル関数**

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(n+k)!}$$

が解となる．この解の例を図 5 に示す．太鼓の皮が半径方向に波打つ様子がわかる．また，その振幅は半径に依存して変わり，このことが微分方程式 (8) の係数が $z$ に依存していることと符合する．

## 5. つながる振動

2 節と 3 節では振動子がひとつのものを扱ったが，今度は振動子をつなげてみよう．図 6 のように線形バネと質点をずらっとつなげた系を考える．すると $n$ 番目の質点の位置 $y_n(t)$ に関する運動方程式は

$$\ddot{y}_n = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \tag{9}$$

となる．一般解は導出が面倒なので特解の一例を挙げると，

$$y_n(t) = A\sin(kn + \omega t + c), \quad \omega = \pm 2\sin\frac{k}{2}$$

がある．(9) のような線形方程式は解の形を仮定することで容易に特解を得ることができる．

ところが非線形振動子の場合はそうはいかず，それぞれで工夫が必要である．その一例として，

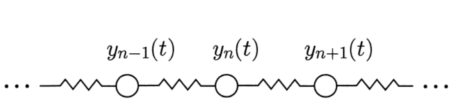



**図 6**　連成バネ．

図 6 のバネが指数関数型のポテンシャルを有する**戸田格子方程式**

$$\ddot{y}_n = e^{y_{n+1}} - 2e^{y_n} + e^{y_{n-1}}$$

を取り上げる[3]．まず変数変換

$$y_n(t) = \log(1 + v_n(t))$$

により，

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1 + v_n) = v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1} \tag{10}$$

を得る．この方程式にはヤコビの楕円関数 dn を用いた周期解

$$v_n(t) = A(\mathrm{dn}^2(kn + \omega t + c) + B)$$

が存在する．

さらに，**多ソリトン解**と呼ばれる，複数の孤立波（ソリトン）が相互作用するタイプの解も存在する．それを示すにはさらに

$$v_n(t) = \frac{d^2}{dt^2}\log f_n(t)$$

と変数変換し，時間について 2 回積分することによって $f_n$ についての**双線形方程式**

$$\ddot{f}_n f_n - \dot{f}_n^2 = f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2$$

を導いておく．この方程式の特解として，2 ソリトンなら

$$f_n(t) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + Ae^{\eta_1 + \eta_2},$$
$$\eta_i = k_i n + \omega_i t + c_i, \quad \omega_i = 2\sigma_i \sinh(k_i/2),$$
$$\sigma_i = \pm 1, \quad A = \frac{\cosh\frac{k1-k2}{2} - \sigma_1\sigma_2}{\cosh\frac{k1+k2}{2} - \sigma_1\sigma_2}$$

で与えられる．$k_i$, $c_i$ と波動の方向を決める符号 $\sigma_i$ が任意である．図 7 に 2 つのソリトンがぶつかって互いをすり抜ける様子を示す．

## 6. とびとびの振動

今までは時間変数が連続な振動現象を紹介してきたが，今度は時間が離散的な振動現象を考えよう．滑らかに時間変化するのではなく，とびとび

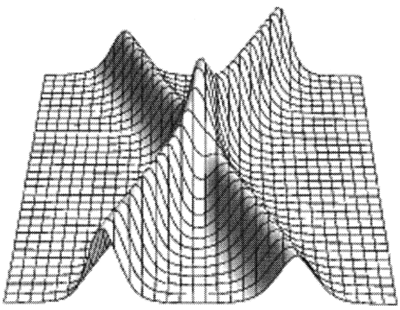


図 7　戸田格子方程式の 2 ソリトン解．右に $n$ 軸，奥に $t$ 軸．

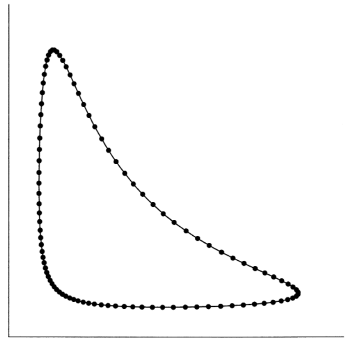


図 8　QRT 写像の解の例．

の時刻を移りながらパラパラ漫画のように振動が再現されるのである．

そのような振動の方程式を作る一つの道筋として，微分方程式の**差分化**がある．例えば単振動の方程式 $\ddot{y} = -y$ の差分化として

$$\frac{1}{\delta^2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) = -y_n$$

が考えられる．$y_n$ は $y(n\delta)$ を差分近似した変数である．この方程式にもエネルギー保存則に相当する関係があり，

$$\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\delta}\right)^2 + y_n y_{n-1}$$

が $n$ によらない定数となる．

厳密解を有する非線形振動として面白いものに，**キスペル–ロバーツ–トンプソン（QRT）写像**がある[4]．この写像は，ハイゼンベルグ・スピン鎖の特別な場合や定常な差分変形 KdV 方程式などを表す汎用の写像として提案された．QRT 写像の対称的な場合は次式で与えられる．

$$y_{n+1} = \frac{f_1(y_n) - y_{n-1} f_2(y_n)}{f_2(y_n) - y_{n-1} f_3(y_n)}. \tag{11}$$

ここで関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ は，定数を成分とする任意の $3 \times 3$ 対称行列 $A$, $B$ および $\boldsymbol{v}(x) = {}^t(x^2, x, 1)$ を用いて

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = (A\boldsymbol{v}(x)) \times (B\boldsymbol{v}(x))$$

で定義される．(11) は $y_{n+1}$ が $y_{n-1}$, $y_n$ から決まる 2 階の差分方程式であり，$n$ によらない保存量

$$H(y_{n-1}, y_n) = \frac{{}^t\boldsymbol{v}(y_{n-1})A\boldsymbol{v}(y_n)}{{}^t\boldsymbol{v}(y_{n-1})B\boldsymbol{v}(y_n)}$$

を持つことから**可積分**な写像となっている．$A$, $B$ を具体的に定めたときの簡単な例として

$$y_{n+1} = \frac{1 + cy_n}{y_{n-1} y_n^2} \tag{12}$$

があり，保存量は

$$H(y_{n-1}, y_n) = y_{n-1}y_n + c\left(\frac{1}{y_{n-1}} + \frac{1}{y_n}\right) + \frac{1}{y_{n-1}y_n}$$

となる．図 8 に $y_{n-1}$ を横軸に $y_n$ を縦軸にとった相平面内の解軌道の例を示す．ドットが解の点列 $(y_{n-1}, y_n)$ であり，実線が $H(y_{n-1}, y_n)$ の等値線である．QRT 写像の解は一般に楕円関数で表せ，例えば (12) の場合，ヤコビの楕円関数 cn を用いて

$$y_n = A + B\,\mathrm{cn}^2(\alpha n + \beta; k)$$

という形で表せる．

## 7. むちゃくちゃでもない振動

値域が有界であるにも関わらず，初期値のわずかな差が時間とともに指数的に拡大するような系を**カオス系**という．差分方程式では 1 階のものでも簡単にカオス系を作ることができる．

生物の個体数の増加に上限を設けた数理モデルとして**ロジスティック方程式**

$$\dot{y} = y(1 - y) \tag{13}$$

がある（3 節の $L(t)$ も同等の式に従う）．$y(t)$ は時刻 $t$ における個体数を表す．この方程式の解は $y(t)=1/(1+Ae^{-t})$ でありカオス的ではない．

(13) を時間について差分化した方程式

$$\frac{1}{\delta}(y_{n+1}-y_n)=y_n(1-y_n)$$

をさらに $y$ についてスケール変換すると**ロジスティック写像**

$$y_{n+1}=Ay_n(1-y_n) \tag{14}$$

が得られる[5)]．この方程式は，第 $n$ 世代というような離散時刻を想定した生態系の数理モデルとみなすことができる．

定数 $A$ を 0 から 4 まで徐々に大きくしていくと，最初は比較的単純な $y_n$ の挙動が複雑になっていき，ついにはカオス的振舞いとなる．特に $A=4$ では

$$y_n=\sin^2(2^n\theta_0) \tag{15}$$

という厳密解を得ることができる．定数 $\theta_0$ が少しでも異なると，その違いが $2^n$ によって指数的に拡大するという系のカオス的振舞いがよく理解できる．(15) の最初の 100 回の写像の様子を図 9 に示す．

このように厳密解が得られる**可解**なカオス写像はいろいろ知られている．その一例としてロジスティック写像を一般化した

$$y_{n+1}=\frac{4y_n(1-y_n)(1-k^2y_n)}{(1-k^2y_n^2)^2}$$

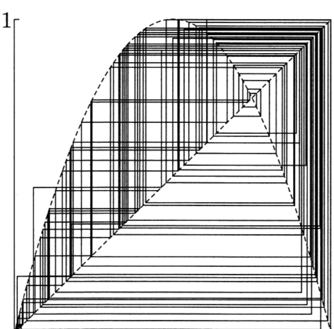



**図 9**　ロジスティック写像．

の厳密解はヤコビの楕円関数 sn を用いて

$$y_n=\mathrm{sn}^2(2^n\theta_0;k)$$

で与えられる[6)]．

## 8. おわりに

以上，駆け足で振動現象と厳密解を紹介してきたが，三角関数や楕円関数のオンパレードであった．なぜなら，振動だけにその表現には周期関数が必須であり，複素平面上で $f(z+\omega)=f(z)$ を満たす有理型の関数は楕円関数がすべてで，三角関数もその特別な場合にすぎないからである．しかしながら，それだけでいろんなタイプの振動現象を表せることもおわかりいただけたと思う．

また保存量やリャプノフ関数といった方程式に付随する量も解に重要な情報を与えている．たとえ厳密解が得られなくとも，これらの量を調べるだけで解の振舞いの大部分を把握できる．

さらに，例えば可積分系とカオス系は解の定性的性質によって通常は別のクラスに分類される．ところが厳密解の立場から考えると，解に組み込まれた式の詳細が少し異なるだけであり，表の顔は周期関数のような共通のものが見えている．両者は遠いようで実は近いのかもしれない．このことが示唆するように，無限の探査精度をもつ厳密解を駆使すれば秘められた鉱脈をまだまだ探せるのではないだろうか，というのが筆者の期待である．

### 参考文献

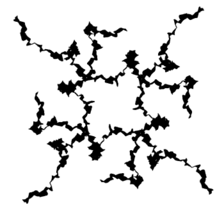

1) 有山正孝『振動・波動』基礎物理学選書 8，裳華房，1970 年．
2) 野海正俊『パンルヴェ方程式—対称性からの入門—』すうがくの風景 4，朝倉書店，2002 年．
3) 戸田盛和『ソリトンと物理学』SGC ライブラリ 49，サイエンス社，2006 年．
4) G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, “Integrable mappings and soliton equations II”, *Physica D* **34** (1989) 183–192.
5) ロバート・L・ドゥヴェイニー（訳：後藤憲一，新訂版訳：国府寛司，石井豊，新居俊作，木坂正史）『カオス力学系入門　第 2 版』共立出版，2003 年．
6) E. Schröder, “Ueber iterirte Functionen”, *Math. Ann.* **3** (1870) 296–322.



（たかはし・だいすけ，早稲田大学理工学術院）

# シュレディンガー方程式と厳密解

## 解ける仕組みと新しい直交多項式の発見



小竹　悟

## 1. はじめに

量子力学の基礎方程式である**シュレディンガー方程式**は，調和振動子や水素原子に対して厳密解を与えることができ，それらは量子力学の発展において重要な役割を果たした．また，調和振動子の生成消滅演算子の概念は場の量子論の進展に欠かせないものであった．数理物理としては，解ける模型の中に見出される構造に美しさを感じ，より一般的な構造や新しい構造を見つけようとして，研究が進んできた．

本稿では1次元のシュレディンガー方程式の束縛状態を考える．時間に依存するシュレディンガー方程式

$$i\hbar\partial_t\psi(t,x)=\mathcal{H}\psi(t,x),\quad \|\psi\|<\infty \tag{1}$$

において，時間依存性を $\psi(t,x)=e^{-i\mathcal{E}t/\hbar}\phi(x)$ と分離すると，

$$\mathcal{H}\phi(x)=\mathcal{E}\phi(x),\quad \|\phi\|<\infty \tag{2}$$

という時間に依らないシュレディンガー方程式が得られる．ハミルトニアンは $\mathcal{H}=\frac{1}{2m}p^2+U(x)$，運動量は $p=-i\hbar\partial_x$ であるが，式を見易くするために，$\hbar$, $m$ などを1にとり，$2U$, $2\mathcal{H}$ を改めて $U$, $\mathcal{H}$ と書くことにしよう．つまりハミルトニアンと運動量を

$$\mathcal{H}=p^2+U(x),\quad p=-i\partial_x \tag{3}$$

とする．

## 2. スツルム・リューヴィルの定理

シュレディンガー方程式 (2)–(3) は2階の微分方程式

$$-\partial_x^2\phi(x)+U(x)\phi(x)=\mathcal{E}\phi(x)$$

である．座標 $x$ の範囲を $x_1\le x\le x_2$ とし，適当な境界条件（例えば，$\phi(x_j)=\partial_x\phi(x_j)=0\ (j=1,2)$）を課したものを考える．内積を $(f,g)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int_{x_1}^{x_2}dx f(x)^*g(x)$ とする．ある種の2階微分方程式に対する境界値問題は**スツルム・リューヴィルの問題**と呼ばれ，解の性質を述べた定理が知られている[1)]．それを今の場合に述べておくと，

- $\mathcal{H}\phi_n(x)=\mathcal{E}_n\phi_n(x)\quad(n=0,1,2,\ldots)$,
  $0=\mathcal{E}_0<\mathcal{E}_1<\mathcal{E}_2<\cdots.$ (4)
- $\phi_n(x)$ は $x_1<x<x_2$ に $n$ 個の零点を持ち，$\phi_n(x)$ の相隣り合う零点の間に $\phi_{n-1}(x)$ の零点がある． (5)
- $(\phi_n,\phi_m)=h_n\delta_{nm}\quad(0<h_n<\infty).$ (6)

ここで，基底状態のエネルギーが0となるように位置エネルギーの原点をずらしておいた．1次元の束縛状態には縮退がなく，(5) は振動定理（部分積分を利用）を用いて示される．固有関数 $\phi_n(x)$ たちはヒルベルト空間の完全系をなしており，実に選んでおく．

本稿で述べる**解ける模型**とは，シュレディンガー方程式 (4) のエネルギー固有値 $\mathcal{E}_n$ と固有関数 $\phi_n(x)$ がすべて具体的に書き表されているものを言う．スツルム・リューヴィルの定理は，$\mathcal{E}_n$ と $\phi_n(x)$ が存在することを保証する存在定理であり，このお蔭で安心して計算を進めることができるが，$\mathcal{E}_n$ と $\phi_n(x)$ の具体形をどのように求めるかについては何も教えてくれない．

## 3. クラムの定理とその拡張

基底状態 $\phi_0(x)$ は $x_1<x<x_2$ に零点を持たないので

$$\phi_0(x)=e^{w(x)},\quad w(x):\textbf{プレポテンシャル}$$

と書いておこう．これを (4) に代入するとポテンシャル $U(x)$ がプレポテンシャルを用いて $U=(\partial_x w)^2+\partial_x^2 w$ と表されることが分かる．するとハミルトニアンは

$$\mathcal{H}=\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A},\quad \mathcal{A}\overset{\text{def}}{=}\partial_x-\partial_x w(x)$$

と因数分解され（$\mathcal{A}^\dagger=-\partial_x-\partial_x w(x)$），基底状態は $\mathcal{A}\phi_0(x)=0$ で特徴付けされる．

このハミルトニアン $\mathcal{H}$ と固有関数 $\phi_n(x)$ に対して，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}^\dagger$ の順序を入れ替えた新しいハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]}$ と関数 $\phi_n^{[1]}(x)$

$$\mathcal{H}^{[1]}\overset{\text{def}}{=}\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger,\quad \phi_n^{[1]}(x)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{A}\phi_n(x)\quad(n=1,2,\ldots)$$

を定義する．このような変換は**ダルブー変換**と呼ばれる．すると $\mathcal{H}^{[1]}\phi_n^{[1]}=\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\phi_n=\mathcal{A}\mathcal{E}_n\phi_n=\mathcal{E}_n\phi_n^{[1]}$ となるので，$\phi_n^{[1]}(x)$ は $\mathcal{H}^{[1]}$ の固有関数であることが分かる．$\phi_n^{[1]}(x)$ から $\phi_n(x)$ への対応は $\phi_n(x)=\frac{1}{\mathcal{E}_n}\mathcal{A}^\dagger\phi_n^{[1]}(x)$ である．また，$(\phi_n^{[1]},\phi_m^{[1]})=(\mathcal{A}\phi_n,\mathcal{A}\phi_m)=(\phi_n,\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\phi_m)=\mathcal{E}_m(\phi_n,\phi_m)=\mathcal{E}_n h_n\delta_{nm}$ である．振動定理の議論を用いて $\phi_n^{[1]}(x)$ が $x_1<x<x_2$ に $n-1$ 個の零点を持つことが示されるので[2)]，スツルム・リューヴィルの定理により，$\phi_n^{[1]}(x)$ が完全系を張ることになる．この新しい系は（基底状態のエネルギーを除いて）元の系とスペクトルが同じ系になっている．この新しい系の基底状態 $\phi_1^{[1]}(x)$ を $e^{w^{[1]}(x)}\overset{\text{def}}{=}|\phi_1^{[1]}(x)|$ と書いておくと，$\mathcal{H}^{[1]}$ は

$$\mathcal{H}^{[1]}=\mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[1]}+\mathcal{E}_1=p^2+U^{[1]}(x)+\mathcal{E}_1,$$
$$\mathcal{A}^{[1]}\overset{\text{def}}{=}\partial_x-\partial_x w^{[1]}(x),\quad \mathcal{A}^{[1]}\phi_1^{[1]}(x)=0,$$
$$U^{[1]}(x)=\big(\partial_x w^{[1]}(x)\big)^2+\partial_x^2 w^{[1]}(x)$$

と表される（図 1 参照）．

この $\mathcal{H}^{[1]}$ は（$+\mathcal{E}_1$ の項を除いて）元の $\mathcal{H}$ と同様に因子化されているので，同じ操作が可能である．つまり $\mathcal{A}^{[1]}$ と $\mathcal{A}^{[1]\dagger}$ の順序を入れ替えた新しいハミルトニアン $\mathcal{H}^{[2]}$ と関数 $\phi_n^{[2]}(x)$ $(n=2,3,\ldots)$ を

$$\mathcal{H}^{[2]}\overset{\text{def}}{=}\mathcal{A}^{[1]}\mathcal{A}^{[1]\dagger}+\mathcal{E}_1,\quad \phi_n^{[2]}(x)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{A}^{[1]}\phi_n^{[1]}(x)$$

と定義すると，$\mathcal{H}^{[2]}\phi_n^{[2]}=(\mathcal{A}^{[1]}\mathcal{A}^{[1]\dagger}+\mathcal{E}_1)\mathcal{A}^{[1]}\phi_n^{[1]}=\mathcal{A}^{[1]}(\mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[1]}+\mathcal{E}_1)\phi_n^{[1]}=\mathcal{A}^{[1]}\mathcal{E}_n\phi_n^{[1]}=\mathcal{E}_n\phi_n^{[2]}$ および $\phi_n^{[1]}(x)=\frac{1}{\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_1}\mathcal{A}^{[1]\dagger}\phi_n^{[2]}(x)$ および $(\phi_n^{[2]},\phi_m^{[2]})=(\mathcal{E}_m-\mathcal{E}_1)(\phi_n^{[1]},\phi_m^{[1]})$ が分かる．また，$\phi_n^{[2]}(x)$ が完全系を張っている．基底状態 $\phi_2^{[2]}(x)$ を $e^{w^{[2]}(x)}\overset{\text{def}}{=}|\phi_2^{[2]}(x)|$ と書いておく．これを繰り返せば，

$$\mathcal{H}^{[M]}=\mathcal{A}^{[M]\dagger}\mathcal{A}^{[M]}+\mathcal{E}_M=p^2+U^{[M]}(x)+\mathcal{E}_M,$$

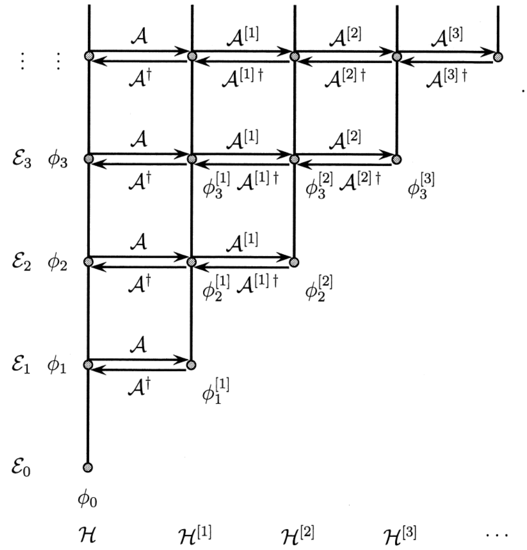



**図 1**　クラムの定理の描像．

$$\mathcal{A}^{[M]}\overset{\text{def}}{=}\partial_x-\partial_x w^{[M]}(x),\quad \mathcal{A}^{[M]}\phi_M^{[M]}(x)=0,$$
$$U^{[M]}(x)=\big(\partial_x w^{[M]}(x)\big)^2+\partial_x^2 w^{[M]}(x),$$
$$\mathcal{H}^{[M]}\phi_n^{[M]}(x)=\mathcal{E}_n\phi_n^{[M]}(x)\quad(n=M,M+1,\ldots),$$
$$(\phi_n^{[M]},\phi_m^{[M]})=\prod_{j=0}^{M-1}(\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_j)\cdot h_n\delta_{nm}$$

が得られる．得られた系は $\mathcal{E}_0,\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_{M-1}$ に対する固有状態が取り除かれており，その他は元の系と同じスペクトルである．$n$ 個の関数 $\{f_k(x)\}$ に対するロンスキアン（$n=0$ では $\mathrm{W}[\cdot](x)=1$）とその性質

$$\mathrm{W}[f_1,\ldots,f_n](x)\overset{\text{def}}{=}\det\big(\partial_x^{j-1}f_k(x)\big)_{1\le j,k\le n},$$
$$\mathrm{W}\big[\mathrm{W}[f_1,\ldots,f_n,g],\mathrm{W}[f_1,\ldots,f_n,h]\big](x)$$
$$=\mathrm{W}[f_1,\ldots,f_n](x)\mathrm{W}[f_1,\ldots,f_n,g,h](x)$$

を用いると，$\phi_n^{[M]}(x)$ と $U^{[M]}(x)$ は

$$\phi_n^{[M]}(x)=\frac{\mathrm{W}[\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{M-1},\phi_n](x)}{\mathrm{W}[\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{M-1}](x)},$$
$$U^{[M]}(x)=U(x)-2\partial_x^2\log\big|\mathrm{W}[\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{M-1}](x)\big|$$

と簡潔に表される[2)]．$x_1<x<x_2$ でロンスキアン $\mathrm{W}[\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{M-1}](x)$ は 0 にならずに定符号であることが示されるので，ポテンシャル $U^{[M]}(x)$ は非特異であり，$\phi_n^{[M]}(x)$ は発散しない．隣り合う系の固有関数は $\phi_n^{[s]}(x)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{A}^{[s-1]}\phi_n^{[s-1]}(x)$ $(n\ge s\ge 1)$，および $\phi_n^{[s-1]}(x)=\frac{1}{\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_{s-1}}\mathcal{A}^{[s-1]\dagger}\phi_n^{[s]}(x)$ という関係にあるから，

$$\phi_n(x) = \frac{\mathcal{A}^\dagger}{\mathcal{E}_n}\frac{\mathcal{A}^{[1]\dagger}}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_1}\cdots\frac{\mathcal{A}^{[n-1]\dagger}}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n-1}}\phi_n^{[n]}(x)$$

を得る（図 1 参照）．つまり $n$ ステップ進んだ系の基底状態が分かれば，元の系の $n+1$ 番目の固有関数が分かることになるが，この**クラムの定理**も存在定理であるため，具体形については何も教えてくれない．

今紹介したクラムの定理では基底状態から連続して $M$ 個の固有状態を取り除いていったのだが，取り除く固有状態の選び方を拡張することができる[3]．取り除く固有状態のラベルを $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_M\}$（$d_j$ は 0 以上の整数で相異なる）とし，新しいポテンシャル $U_{\mathcal{D}}(x)$ と関数 $\phi_{\mathcal{D}\,n}(x)$ を

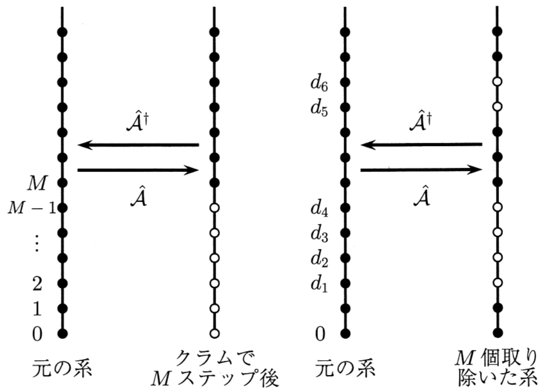
$$U_{\mathcal{D}}(x) = U(x) - 2\partial_x^2 \log\bigl|\mathrm{W}[\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \ldots, \phi_{d_M}](x)\bigr|,$$
$$\phi_{\mathcal{D}\,n}(x) = \frac{\mathrm{W}[\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_n](x)}{\mathrm{W}[\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \ldots, \phi_{d_M}](x)} \qquad (7)$$

と与えると，微分方程式

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}\phi_{\mathcal{D}\,n}(x) = \mathcal{E}_n\phi_{\mathcal{D}\,n}(x) \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\backslash\mathcal{D})$$

が成り立つことは前と同様に分かる．ここで問題は，まともな量子力学系になっているか，つまりポテンシャルが非特異になっているかどうかである．そのためには $x_1 < x < x_2$ において $\mathrm{W}[\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \ldots, \phi_{d_M}](x)$ が 0 にならずに定符号になっていてほしい（すると $\phi_{\mathcal{D}\,n}(x)$ も発散しない）．この条件は，0 以上のすべての整数 $m$ に対して $\prod_{j=1}^{M}(m - d_j) \geq 0$ が成り立っている場合に満たされる．これは，$d_j$ たちが，0 から連続しては何個でもよく（クラムの場合に相当），それ以外は連続する偶数個の固まりになっていることを意味する．そしてこのとき $(\phi_{\mathcal{D}\,n}, \phi_{\mathcal{D}\,m}) = \prod_{j=1}^{M}(\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{d_j}) \cdot h_n\delta_{nm}$ が成り立つ（図 2 参照）．

解ける模型が一つあれば，この拡張されたクラムの定理を様々な $\mathcal{D}$ に対して適用することで，無限個の解ける模型が得られることに注意しておく（エネルギー固有値は（取り除いたもの以外は）元の系と同じで，固有関数は (7) から具体的に得られる）．但し，それが興味深い模型となるかどうかは別問題である．




$\hat{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{[M-1]}\cdots\mathcal{A}^{[1]}\mathcal{A}$ $\qquad$ $\hat{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{d_1\ldots d_M}\cdots\mathcal{A}_{d_1 d_2}\mathcal{A}_{d_1}$

**図 2** $M$ ステップのクラムとその拡張．

## 4. 具体例

解ける模型の典型例である，(i) **調和振動子**，(ii) **動径振動子**（radial oscillator）(iii) **ダルブー・ポッシェル・テラー模型**，を紹介しよう．ポテンシャルは

(i) $\quad U(x) = x^2 - 1,$

(ii) $\quad U(x) = x^2 + \dfrac{g(g-1)}{x^2} - 2g - 1,$

(iii) $\quad U(x) = \dfrac{g(g-1)}{\sin^2 x} + \dfrac{h(h-1)}{\cos^2 x} - (g+h)^2$

で，座標の範囲はそれぞれ $-\infty < x < \infty$, $x \geq 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ である．ここで $g, h$ は結合定数で $g, h > 1$ としておく．固有関数 $\phi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ は

$$\phi_n(x) = \phi_0(x)P_n\bigl(\eta(x)\bigr) \qquad (8)$$

という形をしており，$P_n(\eta)$ は $\eta$ の $n$ 次式である（$\eta$ の意味については 6 節参照）．プレポテンシャル，エネルギー，固有多項式を与えておく：

(i) $\quad w(x) = -\dfrac{1}{2}x^2, \quad \mathcal{E}_n = 2n,$

$\qquad \eta(x) = x, \quad P_n(\eta) = H_n(\eta),$

(ii) $\quad w(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + g\log x, \quad \mathcal{E}_n = 4n,$

$\qquad \eta(x) = x^2, \quad P_n(\eta) = L_n^{(g-\frac{1}{2})}(\eta),$

(iii) $\quad w(x) = g\log\sin x + h\log\cos x,$

$\qquad \mathcal{E}_n = 4n(n+g+h),$

$\qquad \eta(x) = \cos 2x, \quad P_n(\eta) = P_n^{(g-\frac{1}{2}, h-\frac{1}{2})}(\eta).$

$H_n$, $L_n^{(\alpha)}$, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ はそれぞれ**エルミート**，**ラゲール**，**ヤコビの多項式**で，2 階の微分方程式を満たしている．$\phi_n(x)$ は直交関数系なので，$P_n(\eta(x))$ は $\phi_0(x)^2$ を重み関数とする**直交多項式**であり，$x_1 < x < x_2$ で $n$ 個の零点を持つ．

励起状態が (8) の形でない例を一つ挙げておく：

$$U(x) = -\frac{2}{x} + \frac{g(g-1)}{x^2} + \frac{1}{g^2} \quad (x \geq 0). \qquad (9)$$

プレポテンシャル，エネルギー，固有関数は

$$w(x) = -\frac{x}{g} + g\log x, \quad \mathcal{E}_n = \frac{1}{g^2} - \frac{1}{(g+n)^2},$$
$$\phi_n(x) = L_n^{(2g-1)}\left(\frac{2}{g+n}x\right)x^g e^{-\frac{x}{g+n}}$$

で与えられる．

## 5. 解けるための十分条件（その 1）：形状不変性

スツルム・リューヴィルの定理とクラムの定理（およびその拡張）は存在定理であるため，具体的にエネルギー固有値や固有関数を求める方法を教えてくれなかった．これらを具体的に求める方法の一つ目として**形状不変性**（**シェイプ不変性**，shape invariance）を紹介する．この方法は因子化の方法，超対称量子力学の方法[4]，などと呼ばれることもあるが，今の問題に対しては超対称性それ自身は不要であることを注意しておく．

系が幾つかのパラメータ $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ を含んでいるとし，その依存性を $\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}), \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}), \mathcal{E}_n(\boldsymbol{\lambda}), \phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ などと書こう．ハミルトニアンの因子化に現れた演算子 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ が

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger = \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^\dagger\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) + \mathcal{E}_1(\boldsymbol{\lambda}) \quad (10)$$

（$\boldsymbol{\delta}$ は定数）を満たしているときに，系には形状不変性があるという．これは書き換えれば

$$\begin{aligned}&\big(\partial_x w(x;\boldsymbol{\lambda})\big)^2 - \partial_x^2 w(x;\boldsymbol{\lambda})\\ &= \big(\partial_x w(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\big)^2 + \partial_x^2 w(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) + \mathcal{E}_1(\boldsymbol{\lambda})\end{aligned}$$

という条件である．形状不変と言う理由は，クラムの定理と組み合わせてみると分かる．3 節の $\mathcal{H}^{[1]}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{[1]}(\boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\\ &= \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^\dagger\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) + \mathcal{E}_1(\boldsymbol{\lambda})\\ &= \mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) + \mathcal{E}_1(\boldsymbol{\lambda})\end{aligned}$$

となるので，$\mathcal{H}^{[1]}$ は（付加定数 $\mathcal{E}_1$ を除いて）元のハミルトニアンと同じ形でパラメータの値が $\boldsymbol{\delta}$ ずれているだけのものである．よって

$$\mathcal{A}^{[1]}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}), \quad \phi_n^{[1]}(x;\boldsymbol{\lambda}) \propto \phi_{n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$$

となる．これを続ければ

$$\mathcal{H}^{[s]}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}+s\boldsymbol{\delta}) + \mathcal{E}_s(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\mathcal{A}^{[s]}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+s\boldsymbol{\delta}), \quad \phi_n^{[s]}(x;\boldsymbol{\lambda}) \propto \phi_{n-s}(x;\boldsymbol{\lambda}+s\boldsymbol{\delta})$$

を得て，エネルギー固有値 $\mathcal{E}_n$ と固有関数 $\phi_n$ が，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{s=0}^{n-1}\mathcal{E}_1(\boldsymbol{\lambda}+s\boldsymbol{\delta}),\\ \phi_n(x;\boldsymbol{\lambda}) &\propto \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^\dagger\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\delta})^\dagger\cdots\\ &\quad\cdots\mathcal{A}\big(\boldsymbol{\lambda}+(n-1)\boldsymbol{\delta}\big)^\dagger\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+n\boldsymbol{\delta}) \quad (11)\end{aligned}$$

と具体的に表されることが分かる．よって条件 (10) が満たされていれば，第 1 励起状態のエネルギー $\mathcal{E}_1$ から $\mathcal{E}_n(\boldsymbol{\lambda})$ が計算され，$\mathcal{A}$ に含まれるプレポテンシャルを用いて表される基底状態の波動関数 $\phi_0(x) = e^{w(x)}$ に微分演算子 $\mathcal{A}^\dagger$ を掛けるだけで $\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ が求められることになる（$\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ の具体形を綺麗な式で書けるかどうかは別問題である）．

4 節で与えた例には形状不変性があり，そのデータは

(i) $\boldsymbol{\lambda}$ はなし， (ii) $\boldsymbol{\lambda} = g,\ \boldsymbol{\delta} = 1,$

(iii) $\boldsymbol{\lambda} = (g,h),\ \boldsymbol{\delta} = (1,1),$ (9) $\boldsymbol{\lambda} = g,\ \boldsymbol{\delta} = 1$

である．式 (11)（または基底状態の寄与を取り除いたバージョン）は直交多項式の**ロドリーグ**の公式を与える．

レビュー論文を見ると，形状不変性を持つ模型のリストが載っている．これまでその数はせいぜい数十個であったが，7 節で紹介する発見によって一気に無限個に増加した．

## 6. 解けるための十分条件（その 2）：閉関係式

解けるための十分条件の二つ目として，**閉関係式** (closure relation)[5]を紹介する．これは特別な座標 $\eta = \eta(x)$ が存在して，

$$\big[\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta]\big] = \eta R_0 + [\mathcal{H},\eta]R_1 + R_{-1},$$
$$R_i = R_i(\mathcal{H}) : \mathcal{H}\ \text{の多項式}$$

という交換関係を満たすものである．微分演算子の次数を考えると，$R_0, R_1, R_{-1}$ はそれぞれ高々 1,0,1 次式となる．4 節の例 (i)–(iii) は閉関係式が成立する：

(i) $R_0 = 4, \quad R_1 = 0, \quad R_{-1} = 0,$

(ii) $R_0 = 16, \quad R_1 = 0, \quad R_{-1} = -8(\mathcal{H}+2g+1),$

(iii) $R_0 = 16\big(\mathcal{H}+(g+h)^2-1\big), \quad R_1 = 8,$
$\quad R_{-1} = 16(g-h)(g+h-1).$

記号 $(\mathrm{ad}\mathcal{H})\eta = [\mathcal{H},\eta]$ を用いると，$(\mathrm{ad}\mathcal{H})^2\eta = [\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta]]$, $(\mathrm{ad}\mathcal{H})^3\eta = [\mathcal{H},[\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta]]]$, … と表されるが，閉関係式を用いると $(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n\eta$ がやはり $\eta, [\mathcal{H},\eta],$

1 の $\mathcal{H}$-係数の線型結合として具体的に表されることが分かる（3 項間の漸化式に帰着するのでそれを解けばよい）．式 (1) は時間依存性を状態（波動関数）に割り振った**シュレディンガー描像**での方程式であったが，時間依存性を演算子に割り振った**ハイゼンベルグ描像**での方程式は**ハイゼンベルグ方程式** $i\partial_t A(t) = [A(t), H]$ である．その解は

$$A(t) = e^{it\mathcal{H}}Ae^{-it\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n A$$

で与えられるので，$(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n A$ が分かればハイゼンベルグ解 $A(t)$ が得られることになる．今 $\eta(x)$ はこの状況にあるのでハイゼンベルグ解が

$$e^{it\mathcal{H}}\eta(x)e^{-it\mathcal{H}} = a^{(+)}e^{i\alpha_+ t} + a^{(-)}e^{i\alpha_- t} - R_{-1}R_0^{-1},$$

$$a^{(\pm)} \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\pm[\mathcal{H}, \eta(x)] \mp \big(\eta(x) + R_{-1}R_0^{-1}\big)\alpha_{\mp}\Big) \times (\alpha_+ - \alpha_-)^{-1},$$

$$\alpha_\pm = \alpha_\pm(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Big(R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4R_0}\Big)$$

と求まる．“振動数” $\alpha_\pm(\mathcal{H})$ がハミルトニアンの値によるので，調和振動子（$\alpha_\pm = \pm 2$ が定数）とは異なるが，正弦関数で振動するので，この $\eta(x)$ は**シヌソイダル（sinusoidal）座標**と呼ばれる．

調和振動子では，$x$ のハイゼンベルク解の負振動数部分の係数 $a^{(+)}$ が**生成演算子**，正振動数部分の係数 $a^{(-)}$ が**消滅演算子**を与えていた．固有関数が (8) という形をしている場合には，シヌソイダル座標 $\eta(x)$ のハイゼンベルグ解に対して同じことが成り立つことが示される[5]．つまり，$a^{(\pm)}$ が生成消滅演算子を与える：

$$a^{(+)}\phi_n(x) = A_n\phi_{n+1}(x),\quad a^{(-)}\phi_n(x) = C_n\phi_{n-1}(x).$$

ここで比例定数 $A_n, C_n$ は，直交多項式の**三項関係式**

$$\eta P_n(\eta) = A_n P_{n+1}(\eta) + B_n P_n(\eta) + C_n P_{n-1}(\eta)$$

に現れる係数である．直交多項式はこの三項関係式を満たし，逆にこの三項関係式を満たす多項式は直交多項式になることが知られている．エネルギーは $\mathcal{E}_{n\pm1} - \mathcal{E}_n = \alpha_\pm(\mathcal{E}_n)$ などの関係式を満たすことも示され，ここからエネルギー固有値 $\mathcal{E}_n$ が求まる．（$\mathcal{H}$ を含んだ表式ではあるが）生成消滅演算子は具体的に表された微分演算子なので，基底状態 $\phi_0(x)$ に生成演算子 $a^{(+)}$ を次々と掛けることにより励起状態 $\phi_n(x)$ が具体的に求められる．閉関係式を満たす $\eta$ と $\mathcal{H}$ は分類されており，すべて既知の模型で形状不変性がある．

例 (ii) や (iii) のように相互作用が入った系でハイゼンベルグ解が具体的に求まったことは著者にとって驚

きであり，それを用いて生成消滅演算子が自然に定義されたことは新鮮であった．また，このような研究が2006年まで行われていなかったことは意外であった．

## 7. 新しい直交多項式の発見

（通常の）直交多項式は，0次式から始まる多項式たち $\{P_n(x)\}_{n=0,1,\ldots}$（$P_n(x)$ は $n$ 次式）で，適当な重み関数の内積で直交し，完全系をなしている．例えば，重み関数が与えられたときに，完備である単項式の集合 $\{1,x,x^2,\ldots\}$ にグラム・シュミットの正規直交化法を適用すれば直交多項式が得られる．エルミート $H_n(x)$，ラゲール $L_n^{(\alpha)}(x)$，ヤコビ $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ の多項式は，重み関数を $e^{-x^2}$, $x^\alpha e^{-x}$, $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ に選んで得られるものである．しかし，重み関数を適当に与えて作った直交多項式はうまい微分方程式を満たすとは限らず，むしろそのようなものは少数派である．実際，2階の微分方程式を満たす（通常の）直交多項式は，エルミート，ラゲール，ヤコビの多項式に限られるという**ボホナーの定理**がある*1)．ボホナーの定理を回避するために，2階を高階に，微分を差分に，などの変更が考えられてきたが，最近進展があったのは，「0次式から始まる」を「$\ell$ 次式から始まる」（$\ell$ は自然数）に変更するものである．この新しい直交多項式 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=\ell,\ell+1,\ldots}$ は通常の直交多項式が満たすべき三項関係式を満たさず，$\ell$ 次式から始まるにも拘らず完全系をなしており，さらに2階の微分方程式を満たすものである．例 (i)–(iii) に3節のクラムの定理の拡張版を適用すれば，次数がところどころ欠けた直交多項式（完全系をなしている）が無数に得られるが，これはあまりにも人工的であり，本質的な意味はないと思えるので（形状不変性も失われる)，これ以上は考えないことにする．今考えたいのは，$\ell$ 次以上はすべての次数が現れ，完全系をなし，2階の微分方程式を満たす直交多項式である．

2008年にゴメスウラテ・カムラン・ミルソンは，1次式から始まる多項式の完全系を考察し，ラゲールとヤコビの多項式を変形して，2階の微分方程式を満たす直交多項式を構成して，**例外（exceptional）直交多項式**（$X_1$ 直交多項式）と名付けた[6]．そしてケンは，固有関数がこの例外直交多項式で記述される量子力学系を構成し，形状不変性があることを示した[7]．例えばラゲールの場合のポテンシャルは

$$U(x)=x^2+\frac{g(g+1)}{x^2}-2g-3+\frac{4}{x^2+g+\frac{1}{2}}-\frac{4(2g+1)}{(x^2+g+\frac{1}{2})^2}$$

である．翌年に佐々木と著者は，形状不変性を保つように (ii) と (iii) の系を変形し，すべての自然数 $\ell$ に対して，$\ell$ 次式から始まるラゲールとヤコビの例外直交多項式（$X_\ell$ 直交多項式）を構成した[8]．

我々はこの例外直交多項式を，変形に使用する多項式を目の子で見つけ，形状不変性を頼りに発見法的に構成した．その後，より系統的な構成法がないかと考えて見出したのが，**仮想状態除去法**である[9]．式としては3節のクラムの定理の拡張版の (7) と同じ形の式

$$U_{\mathcal{D}}(x)=U(x)-2\partial_x^2\log\left|\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1},\tilde{\phi}_{d_2},\ldots,\tilde{\phi}_{d_M}](x)\right|,$$

$$\phi_{\mathcal{D}\,n}(x)=\frac{\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1},\tilde{\phi}_{d_2},\ldots,\tilde{\phi}_{d_M},\phi_n](x)}{\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1},\tilde{\phi}_{d_2},\ldots,\tilde{\phi}_{d_M}](x)}$$

を用いる．3節との違いは，固有状態を取り除くのではなく，**仮想状態（virtual state）**$\tilde{\phi}_{\rm v}(x)$ という非物理的状態を“取り除く”点にある．仮想状態の波動関数 $\tilde{\phi}_{\rm v}(x)$ は，微分方程式 $\mathcal{H}\tilde{\phi}_{\rm v}(x)=\tilde{\mathcal{E}}_{\rm v}\tilde{\phi}_{\rm v}(x)$ を満たすが，右端（$x=x_2$）または左端（$x=x_1$）いずれか一方の境界条件がおかしくなっているために2乗可積分ではない解で，ヒルベルト空間に属していない．また，逆数 $1/\tilde{\phi}_{\rm v}(x)$ も2乗可積分ではなく，$\tilde{\mathcal{E}}_{\rm v}<0$ とする．微分方程式 $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}\phi_{\mathcal{D}\,n}(x)=\mathcal{E}_n\phi_{\mathcal{D}\,n}(x)$ が成り立つことは，$\tilde{\phi}_{\rm v}(x)$ が $\mathcal{H}\tilde{\phi}_{\rm v}(x)=\tilde{\mathcal{E}}_{\rm v}\tilde{\phi}_{\rm v}(x)$ を満たすことから導かれるが，問題は量子力学系としてまともなものかどうかである．これは $U_{\mathcal{D}}(x)$ が非特異，つまり $x_1<x<x_2$ で $\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1},\tilde{\phi}_{d_2},\ldots,\tilde{\phi}_{d_M}](x)$ が0にならずに定符号になっていればよい．例 (ii) と (iii) を考えると，元の系の離散対称性を利用してパラメータをひねることによって（例えば (iii) なら，$(g,h)\to(g,1-h)$ or $(1-g,h)$），仮想状態が得られる（例 (i) ではひねるべきパラメータがないので仮想状態が作れない)．そして，$\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1},\tilde{\phi}_{d_2},\ldots,\tilde{\phi}_{d_M}](x)$ の定符号性を示すことができる．3節の固有状態を取り除く場合とは異なり，$d_j$ に対しての条件はつかないし，$\phi_{\mathcal{D}\,n}(x)$ の $n$ は元の系と同じく $n=0,1,2,\ldots$ で，完全に同じスペクトルである．また，形状不変性も保たれている．固有関数 $\phi_{\mathcal{D}\,n}(x)$ を書き下すと多項式 $P_{\mathcal{D},n}\big(\eta(x)\big)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ が現れる．これは $\eta$ の $\ell+n$ 次式で（$\ell$ は $\mathcal{D}$ で定まる自然数），$d_j$ たちでラベルされるので，ラゲールおよびヤコビの**多添字（multi-indexed）直交多項式**と

*1) もう一つベッセルの多項式（ベッセル関数とは別物）が許されるが，重み関数が正定値ではないのでここでは考えない．

名付けた．$P_{\mathcal{D},n}\bigl(\eta(x)\bigr)$ は $x_1 < x < x_2$ に $n$ 個の零点を持ち，完全系をなし，2 階の微分方程式を満たしている．ヤコビの場合には，この微分方程式は $3+\ell$ 個の確定特異点を持つフックス型の微分方程式で，多添字直交多項式はその大域解を与えている．$\mathcal{D}=\{\ell\}$ の場合は例外直交多項式になる．$P_{\mathcal{D},n}$ の具体形については，興味を持たれた方は文献 9) を御覧頂きたい．

## 8. おわりに

ハミルトニアンを (3) の形に選んだことにより，シュレディンガー方程式は 2 階の微分方程式であった．別の形のハミルトニアンを取り，時間に依らないシュレディンガー方程式が 2 階の**差分方程式**となった系を佐々木と著者は考察し，**離散量子力学（discrete quantum mechanics）**と呼んでいる[10]．解ける模型の場合には，超幾何直交多項式のアスキースキームに属する直交多項式（アスキー・ウィルソン，$q$-ラカーなど）が現れ，本稿で紹介した方法を用いて，それらに対しても例外および多添字直交多項式を構成することができる．

これらの新しい直交多項式は発見されたばかりだが，通常の直交多項式と同じように様々な応用が考えられ，今後の発展が期待される．

### 参考文献


1) 例えば,『岩波数学辞典（第 4 版）』, 岩波書店，186C.
2) M.M. Crum, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **6** (1955) 121–127, arXiv:physics/9908019.
3) M.G. Krein, *Doklady Acad. Nauk. CCCP*, **113** (1957) 970–973; V.É. Adler, *Theor. Math. Phys.* **101** (1994) 1381–1386.
4) 坂本眞人：『量子力学から超対称性へ—超対称性の本質的理解に向けて』（仮称），サイエンス社（近刊）.
5) S. Odake and R. Sasaki, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 102102 (33pp), arXiv:quant-ph/0605215.
6) D. Gómez-Ullate, N. Kamran and R. Milson, *J. Math. Anal. Appl.* **359** (2009) 352–367, arXiv:0807.3939.
7) C. Quesne, *J. Phys.* **A41** (2008) 392001, arXiv:0807.4087.
8) S. Odake and R. Sasaki, *Phys. Lett.* **B679** (2009) 414–417, arXiv:0906.0142; *Phys. Lett.* **B684** (2010) 173–176, arXiv:0911.3442.
9) S. Odake and R. Sasaki, *Phys. Lett.* **B702** (2011) 164–170, arXiv:1105.0508.
10) S. Odake and R. Sasaki, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 353001 (47pp), arXiv:1104.0473.



（おだけ・さとる，信州大学理学部）

# Dirac 方程式と厳密解

菊 川　芳 夫

本稿では相対論的な効果による原子スペクトルの微細構造がディラック方程式の厳密解から正しく再現されることを概観し，解の構造とその限界を議論してみたい．

## 1. 原子スペクトルの微細構造

原子の性質やスペクトルは原子内を運動する電子の量子的な振舞い，特に最外殻軌道の電子の振舞いによってほぼ決まる．水素原子（原子番号 $Z = 1$）における電子の運動は，非相対論的には次のシュレーディンガー方程式によって記述することができる：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = H_0\,\psi(\boldsymbol{r},t),$$
$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}.$$

エネルギー準位は $H_0$ の固有値として得られ，

$$E_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{m_{\mathrm{e}}}{\hbar^2}\frac{1}{n^2}\quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる．ここで主量子数 $n$ は動径量子数 $n_r$ および角運動量量子数 $l$ と $n = n_r + l + 1$ の関係にある．

しかし，実際の水素原子では図 1 に示すように同じ主量子数 $n$ をもつエネルギー準位も

$$\delta E \simeq |E_1|\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^2 \simeq hcR_\infty \times 10^{-6}$$

程度の幅で縮退が解けている（$R_\infty = |E_1|/hc$ はリュードベリ定数）．この現象は原子スペクトルの**微細構造**と呼ばれ，電子スピンと相対論的効果を考慮することによって初めて理解できる．

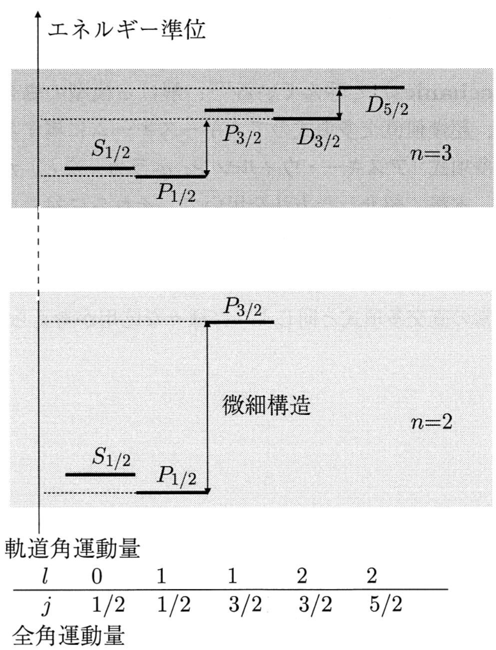



図 1　水素原子のエネルギー準位．

## 2. 電子のスピンと固有磁気モーメント

電子のスピン $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ は，大きさ $\hbar/2$ の角運動量として定義され，次の関係を満たす．

$$\left[\hat{S}_i, \hat{S}_j\right] = i\hbar\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\hat{S}_k,\quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{k=1}^{3}\hat{S}_k\hat{S}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2.$$

この $\hat{\boldsymbol{S}}$ はパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$，すなわち，次の 3 個の $2\times 2$ エルミート行列

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

を用いて次のように表現することができる：

$$\hat{\boldsymbol{S}}=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}.$$

スピンに伴って，電子は固有の磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{e}}=-g\frac{e}{2m_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{S}\quad (g=2)$$

をもつと考えられる．電磁場が作用する場合のハミルトニアンにおいて一様な磁場を表すベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B})/2$ を取れば，

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2m_{\mathrm{e}}}\left(\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2-e\phi(\boldsymbol{r})\\ &\to -\frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{\nabla}^2+\frac{e}{2m_{\mathrm{e}}}\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{e^2}{8m_{\mathrm{e}}}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B})^2\end{aligned}$$

となり，軌道角運動量 $\hat{\boldsymbol{L}}$ と $\boldsymbol{B}$ の結合項が現れる．この事実から $\hat{\boldsymbol{S}}$ と $\boldsymbol{B}$ の結合項を次のようにおく：

$$\Delta H_B = g\frac{e}{2m_{\mathrm{e}}}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{B}.$$

係数 $g$ はランデの **$g$ 因子**と呼ばれ，電子の場合 $g=2$ とすることで異常ゼーマン効果が正しく記述できる．

## 3. スピン–軌道相互作用

スピン $\hat{\boldsymbol{S}}$ は電子自身の軌道角運動量 $\hat{\boldsymbol{L}}$ とも結合する．これを**スピン–軌道相互作用**という．球対称な静電ポテンシャル $\phi(r)$ が作用する場合，電子のハミルトニアンは次のようにとる：

$$\begin{aligned}H &= -\frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{\nabla}^2-e\,\phi(r)\\ &\quad+\frac{(g-1)}{2m_{\mathrm{e}}^2c^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\bigl(-e\,\phi(r)\bigr)\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}.\end{aligned}\tag{1}$$

係数に光速 $c$ が現れることからも示唆される通り，スピン–軌道相互作用は相対論的な効果である．電子は原子内で光速のほぼ 100 分の 1 の速さで運動しているから*1)，電子の速度を $\boldsymbol{v}$ とし，$\boldsymbol{\beta}\equiv\boldsymbol{v}/c\,(\ll 1)$ とおけば，電子の静止系へのローレンツ変換は

$$\begin{pmatrix}ct'\\ \boldsymbol{x}'\end{pmatrix}=\Lambda[\boldsymbol{\beta}]\begin{pmatrix}ct\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix},$$
$$\Lambda[\boldsymbol{\beta}]\simeq\begin{pmatrix}1&-\beta_1&-\beta_2&-\beta_3\\-\beta_1&1&0&0\\-\beta_2&0&1&0\\-\beta_3&0&0&1\end{pmatrix}$$

と近似できる．これによって静電ポテンシャルは

$$\begin{pmatrix}\phi'(\boldsymbol{x}',t')/c\\ \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}',t')\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi(\boldsymbol{x})/c\\ -\boldsymbol{\beta}\phi(\boldsymbol{x})/c\end{pmatrix}$$

と変換されるから，電子の静止系では

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}' &= \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{\nabla}\phi(r)\\ &= -\frac{1}{m_{\mathrm{e}}c^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\phi(r)\,\boldsymbol{L}\end{aligned}\tag{2}$$

だけの磁場が現れる．これが電子の固有磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{e}}$ と結合する．

実際には電子の速度は時々刻々と変化していくため，電子の静止系は回転していることになる．速度のわずかに異なるローレンツ変換 $\Lambda[\boldsymbol{\beta}]$ と $\Lambda[\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta}]$ の間には次の関係が成り立っている：

$$\Lambda[\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta}]\cdot\Lambda[\boldsymbol{\beta}]^{-1}\simeq\Lambda[\delta\boldsymbol{\beta}]\cdot R[\delta\boldsymbol{\theta}],$$
$$\delta\boldsymbol{\theta}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\beta}.$$

ここで $R[\delta\boldsymbol{\theta}]$ は座標系の回転を表す．これより電子の静止系の角速度は

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}}=\frac{\delta\boldsymbol{\theta}}{\delta t}=-\frac{1}{2c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}$$

*1) 水素原子 1s 軌道における電子の 2 乗平均速度は

$$\sqrt{\langle\boldsymbol{v}^2\rangle}=\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)c\simeq\frac{1}{137}c.$$

$$= -\frac{1}{2m_e c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\nabla}\big(-e\phi(r)\big)$$
$$= \frac{1}{2m_e c^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(-e\phi(r)\big)\,\boldsymbol{L} \qquad (3)$$

となって，スピンの運動（時間変化）は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{S} \longrightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{S}$$

だけ補正を受けることになる．この効果は**トーマス歳差**と呼ばれている[1,2]．

以上の相対論的な効果は，次のハミルトニアンによって有効的に表すことができる：

$$\Delta H_{LS} = g\frac{e}{2m_e}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}. \qquad (4)$$

式 (4) および (2), (3) から式 (1) の右辺第三項のスピン–軌道相互作用項が得られる．係数 $(g-1)$ が現れているのはトーマス歳差のためであり，$g=2 \longrightarrow (g-1)=1$ となることによって微細構造が正しく記述されることになる．

## 4. 摂動論によるエネルギー準位補正の評価

スピン–軌道相互作用があると電子の全角運動量

$$\hat{\boldsymbol{J}} \equiv \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$$

は保存するが，$\hat{\boldsymbol{L}}$, $\hat{\boldsymbol{S}}$ は個々には保存しない．$\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ 項は $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{J}_z$ の固有関数 $\mathscr{Y}_l^{jm'}$ を用いることで対角化できる*2)：

$$\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}\,\mathscr{Y}^{jm'}_{l=j\mp1/2} = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{\boldsymbol{S}}^2)\,\mathscr{Y}^{jm'}_{l=j\mp1/2} = \frac{\hbar^2}{2}\left\{\begin{matrix} l \\ -l-1 \end{matrix}\right\}\mathscr{Y}^{jm'}_{l=j\mp1/2}.$$

*2) $\mathscr{Y}_l^{jm'}$ は $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{L}_z$ の固有関数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ と $\hat{\boldsymbol{S}}^2$, $\hat{S}_z$ の固有関数 $\chi_+ = {}^t(1,0)$, $\chi_- = {}^t(0,1)$ の合成によって構成できる．$j=l+1/2$ のとき，

$$\mathscr{Y}_l^{jm'}(\theta,\phi) = c_{l,-m'}\,Y_l^{m'+1/2}(\theta,\phi)\,\chi_- + c_{l,+m'}\,Y_l^{m'-1/2}(\theta,\phi)\,\chi_+,$$

$j=l-1/2$ のとき，

$$\mathscr{Y}_l^{jm'}(\theta,\phi) = c_{l,+m'}\,Y_l^{m'+1/2}(\theta,\phi)\,\chi_- - c_{l,-m'}\,Y_l^{m'-1/2}(\theta,\phi)\,\chi_+.$$

ただし，$c_{l,\pm m'} = \sqrt{\frac{l\pm m'+1/2}{2l+1}}$.

これよりスピン–軌道相互作用によるエネルギー準位の補正は次のように評価できる（$l\neq 0$）：

$$\langle n,j,m'|\Delta H_{LS}|n,j,m'\rangle = \frac{1}{2m_e^2c^2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{nl}\left\langle\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right\rangle_{j=l\pm1/2}$$
$$= \frac{1}{4}m_ec^2\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^4\frac{\left\{\begin{matrix} l \\ -l-1 \end{matrix}\right\}}{n^3 l(l+1/2)(l+1)}.$$

さらに，相対論的なエネルギー・運動量関係式 $E=\sqrt{(m_ec^2)^2+c^2\boldsymbol{p}^2}$ から得られる $1/c^2$ 程度の補正を加えた場合，

$$\Delta H = \Delta H_{LS} - \frac{1}{8}\frac{(\hat{\boldsymbol{p}}^2)^2}{m_e^3c^2}$$

として，

$$\langle n,j,m'|\Delta H|n,j,m'\rangle = -\frac{1}{2}m_ec^2\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^4\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{j+1/2}-\frac{3}{4n}\right)$$

となる．この結果は全角運動量量子数 $j$ に依存して準位が分離することを示しており，図 1 に示された微細構造（矢印で示された準位の分離）を定量的にもよく説明している．

以上が非相対論的な量子力学の枠組みでの微細構造の理論である．次にディラック方程式による水素原子のエネルギー準位の計算を見る．

## 5. ディラック方程式

スピン 1/2 をもつ電子の相対論的な波動方程式はディラック方程式で与えられる：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r},t) = H\Psi(\boldsymbol{r},t),$$
$$H = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left\{\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}\right\} + \beta m_ec^2.$$

ここで波動関数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ は 4 成分からなり，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ と $\beta$ は交換関係

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = \delta_{ij}\mathbb{I} \quad (i,j=1,2,3),$$
$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \quad (i=1,2,3),$$
$$\beta^2 = \mathbb{I}$$

を満たす $4\times 4$ 行列である．この交換関係によって，波動関数の各成分はクライン・ゴルドン方程式

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2-\left(\frac{m_{\mathrm{e}}c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(\boldsymbol{r},t)=0$$

を満たし，波動方程式の分散関係は相対論的なエネルギー・運動量の関係に対応する．$\boldsymbol{\alpha}, \beta$ は次のように表示することができる：

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{bmatrix}.$$

また，電磁場が作用する場合のハミルトニアンは

$$H=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left\{\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right\}+\beta m_{\mathrm{e}}c^2-e\phi(\boldsymbol{r},t)$$

となる．

ディラック方程式による相対論的な記述では，電子の全角運動量は次のように定義される．

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{J}}}=\hat{\boldsymbol{L}}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}.$$

ここで $\boldsymbol{\Sigma}$ はパウリ行列の $4\times 4$ 行列への拡張である．この全角運動量 $\hat{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$ は自由粒子の場合や球対称な静電ポテンシャル $\phi(r)$ が作用する場合にはハミルトニアン $H$ と交換する[*3)]：

$$[\hat{\mathcal{J}}_i, H]=0\quad (i=1,2,3).$$

球対称な静電ポテンシャル $\phi(r)$ のみが作用する場合，ハミルトニアン $H$ の固有方程式は 2 成分波動関数を導入して，

$$\Psi(\boldsymbol{r})=\begin{bmatrix} \psi_1(\boldsymbol{r}) \\ \psi_2(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$$

とおけば，次のように表すことができる：

$$\left[E-m_{\mathrm{e}}c^2+e\phi(r)\right]\psi_1(\boldsymbol{r})=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}\psi_2(\boldsymbol{r}),$$
$$\left[E+m_{\mathrm{e}}c^2+e\phi(r)\right]\psi_2(\boldsymbol{r})=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}\psi_1(\boldsymbol{r}).$$

ここで，運動項について関係式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} &= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla} \\ &= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\left[\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\hat{\boldsymbol{r}}\times\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}\right)\right] \\ &= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{L}}}{r}\right]\end{aligned}$$

が成り立ち，また，$\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_z$ の固有関数 $\mathscr{Y}_l^{jm'}$ は

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\,\mathscr{Y}_{l=j\pm 1/2}^{jm'}=[\mp(j+1/2)-1]\mathscr{Y}_{l=j\pm 1/2}^{jm'},$$
$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\,\mathscr{Y}_{l=j\pm 1/2}^{jm'}=-\mathscr{Y}_{l=j\mp 1/2}^{jm'}$$

を満たすことに注意する．これより固有関数を

$$\begin{bmatrix} \psi_1(\boldsymbol{r}) \\ \psi_2(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{\pm}(r)\,\mathscr{Y}_{j\mp 1/2}^{jm}(\theta,\phi) \\ -iv_{\pm}(r)\,\mathscr{Y}_{j\pm 1/2}^{jm}(\theta,\phi) \end{bmatrix}$$

とおくことによって[*4)]，動径成分を分離することができる：

$$\begin{aligned}&\left[E-m_{\mathrm{e}}c^2+e\phi(r)\right]u_{\pm}(r) \\ &\qquad -\hbar c\left[\frac{d}{dr}+\frac{1\pm\lambda}{r}\right]v_{\pm}(r)=0, \\ &\left[E+m_{\mathrm{e}}c^2+e\phi(r)\right]v_{\pm}(r) \\ &\qquad -\hbar c\left[\frac{d}{dr}+\frac{1\mp\lambda}{r}\right]u_{\pm}(r)=0.\end{aligned}$$

ただし，$\lambda=j+1/2$ である．

## 6. 中心力問題の厳密解

水素原子のハミルトニアンは

$$H=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}+\beta m_{\mathrm{e}}c^2-Z\alpha\frac{\hbar c}{r}$$

となる．ただし，$\alpha\equiv\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ とおいた．このハミ

*3) 実際，

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}_i, H\right] &= \left[\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}\right)_i, c\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}\right] \\ &= -\hbar^2 c\,\epsilon_{ijk}\left[r_j, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right]\nabla_k \\ &= +\hbar^2 c\,\epsilon_{ijk}\alpha_j\nabla_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\hbar}{2}\Sigma_i, H\right] &= \left[\frac{\hbar}{2}\Sigma_i, c\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}\right] \\ &= \frac{\hbar^2 c}{2i}\left[\Sigma_i, \boldsymbol{\alpha}_k\right]\nabla_k \\ &= +\hbar^2 c\,\epsilon_{ikj}\alpha_j\nabla_k.\end{aligned}$$

*4) ディラック方程式はパリティ変換

$$\mathcal{P}:\ \boldsymbol{r}\longrightarrow-\boldsymbol{r},\quad \Psi(\boldsymbol{r})\longrightarrow\beta\Psi(-\boldsymbol{r})$$

によって不変に保たれる．上記の固有関数はパリティ変換 $\mathcal{P}$ の固有状態になっている．

ルトニアンの固有値，すなわち，相対論的な水素原子のエネルギー準位は次式で与えられる：

$$E = \frac{m_{\mathrm{e}}c^2}{\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[\sqrt{(j+1/2)^2-(Z\alpha)^2}+n'\right]^2}\right]^{1/2}}. \quad (5)$$

また，対応する固有関数は

$$\Psi_{\pm}(\boldsymbol{r}) \equiv \begin{bmatrix} u_{\pm}(r)\,\mathscr{Y}^{jm}_{j\mp1/2}(\theta,\phi) \\ -iv_{\pm}(r)\,\mathscr{Y}^{jm}_{j\pm1/2}(\theta,\phi) \end{bmatrix} \quad (6)$$

の形で与えられ，$u_{\pm}(r)$, $v_{\pm}(r)$ は級数展開で

$$u_{\pm}(r) = \mathrm{e}^{-(1-\varepsilon^2)^{1/2}x}\,x^{\gamma}\sum_{i=0}^{n'} a_i x^i,$$

$$v_{\pm}(r) = \mathrm{e}^{-(1-\varepsilon^2)^{1/2}x}\,x^{\gamma}\sum_{i=0}^{n'} b_i x^i$$

と得られる．ただし，

$$\varepsilon = \frac{E}{m_{\mathrm{e}}c^2},$$

$$\gamma = -1 + \left[\lambda^2 - (Z\alpha)^2\right],$$

$$x = \frac{m_{\mathrm{e}}c}{\hbar}r$$

とおいた．係数 $a_i, b_i (i = 0, 1, \cdots, n')$ は漸化式

$$Z\alpha\, a_i - (\gamma \pm \lambda + 1 + i)b_i$$
$$= (1-\varepsilon)a_{i-1} - (1-\varepsilon^2)^{1/2}b_{i-1},$$
$$-Z\alpha\, b_i - (\gamma \mp \lambda + 1 + i)a_i$$
$$= (1-\varepsilon)b_{i-1} - (1-\varepsilon^2)^{1/2}a_{i-1}.$$

によって決まる．

固有値 $E$ は整数 $n'(\geq 0)$ に対して係数 $a_{n'+1}$, $b_{n'+1}$ が共にゼロになる条件から得られている．この条件は

$$\frac{b_{n'}}{a_{n'}} = \left[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right]^{1/2}$$

となる．一方，漸化式から

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{Z\alpha(1+\varepsilon)^{1/2} + (\lambda - 1 - \gamma - i)(1-\varepsilon)^{1/2}}{Z\alpha(1-\varepsilon)^{1/2} + (\lambda + 1 + \gamma + i)(1+\varepsilon)^{1/2}}$$

が成り立つから，$i = n'$ の式を連立すれば，条件

$$(1 + \gamma + n')(1-\varepsilon^2)^{1/2} = Z\alpha\varepsilon$$

を得る．この条件を解く $\varepsilon(= E/m_{\mathrm{e}}c^2)$ のうち正の解が式 (5) を与える．

基底状態のエネルギー，波動関数は次の通り：

$$E_0 = m_{\mathrm{e}}c^2\sqrt{1-(Z\alpha)^2},$$

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = N\,\mathrm{e}^{-(Z\alpha)(m_{\mathrm{e}}c/\hbar)r}\,r^{-1+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}} \times \begin{bmatrix} \chi_{\pm} \\ i\frac{Z\alpha}{1+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\,\chi_{\pm} \end{bmatrix}.$$

ここで $\alpha$ と $m_{\mathrm{e}}c/\hbar$（電子のコンプトン波長の逆数）の積はボーア半径 $a_{\mathrm{B}}$ の逆数である．

$$\alpha\left(\frac{\hbar}{m_{\mathrm{e}}c}\right)^{-1} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_{\mathrm{e}}}{\hbar^2} = a_{\mathrm{B}}{}^{-1}.$$

また，上 2 成分と下 2 成分の波動関数の比は

$$\frac{|v_{\pm}|}{|u_{\pm}|} = \frac{Z\alpha}{1+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}} \simeq \frac{1}{2}(Z\alpha)$$

となっている．

固有値 $E$ は $Z\alpha$ についての展開によって

$$E = m_{\mathrm{e}}c^2 - \frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}c^2\frac{(Z\alpha)^2}{n^2} - \frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}c^2\frac{(Z\alpha)^4}{n^3}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right) - \cdots$$

と表すことができる．ただし $n = n' + (j + 1/2)$ である．右辺第一項は電子の静止エネルギー，第二項は非相対論的な水素原子のエネルギー準位，そして第三項以降は相対論的な補正となる．第三項の補正は主量子数 $n$ と全角運動量量子数 $j$ に依存して決まり，図 1 に示された微細構造（矢印で示された準位の分離）を再現していることがわかる．微細構造のサイズは

$$\delta E \simeq (Z\alpha)^2\,|E_1|$$

となっており，無次元の定数 $\alpha$ の大きさで決まっている．この意味で

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\ \left(\simeq \frac{1}{137}\right)$$

は微細構造定数と呼ばれている．

## 7. 限界，そして場の量子論

実際の水素原子のスペクトルでは，さらに微細

な構造が見つかっている．例えば，$2S_{1/2}$ 状態（$n = 2, j = 1/2, l = 0$）は同じ量子数 $n$, $j$ をもつ $2P_{1/2}$ 状態（$n = 2, j = 1/2, l = 1$）のわずかに上側にある（図 1）．このスペクトルの分離は**ラム−シフト**と呼ばれていて，補正のサイズは

$$\delta E \simeq \alpha(Z\alpha)^2|E_1|$$

となっている．ラム−シフトは，原子内の電子が光子を放出・吸収しながら仮想的に他の準位へ遷移することによって生じる輻射補正が主要な原因になっている[3~5]（図 2）．この仮想的な遷移における準位間エネルギーの平均値は

$$\langle E_I - E_{nl}\rangle \simeq 17.8 \times |E_1|$$

程度と評価され，非相対論的ではあるが，連続スペクトル中のかなり高い準位が寄与していることになる．ラム−シフトの理論的な解析には素粒子の生成・消滅を記述できる相対論的な場の量子論の枠組みが必要になる．電子（陽電子）などの荷電粒子と光子の電磁相互作用を記述する場の量子論は**量子電磁力学（Quantum Electrodynamics, QED）**と呼ばれている．

また，電子の $g$ 因子はディラック方程式から $g = 2$ となることが導かれるが，測定値はわずかなずれを示している．このずれは電子の異常磁気モーメントと呼ばれている．非常に高い精度で測定が行われていて，最新の実験結果[6]は

$$a_e = \frac{g-2}{2} = (1159652180.76 \pm 0.27) \times 10^{-12}.$$

これに対し，量子電磁力学による理論計算によれば，$\alpha$ の 1 次の補正は

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \simeq 0.0016$$

となる．最新の理論計算[7]によれば $\alpha$ の 5 次の補正まで結果が得られていて，実験との比較は

$$a_e[\text{exp}] - a_e[\text{theory}] = -1.06(0.82) \times 10^{-12}$$

となっている．また，この結果から微細構造定数が非常に高い精度で決定されている：

$$\alpha^{-1} = 137.035999166(34).$$

このように電子の異常磁気モーメントを通して，量子電磁力学の有効性が非常に高い精度で検証されている．

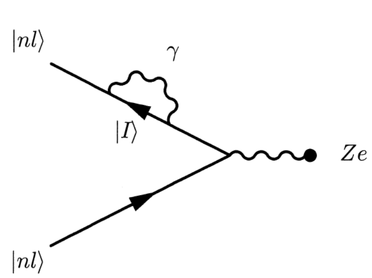



**図 2**　ラム−シフトのファインマン図（一部）．

### 参考文献


1) 朝永振一郎，『スピンはめぐる　成熟期の量子力学』，中央公論社 (1974).
2) J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (2nd Edition), John Wiley & Sons (1975).
3) J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison Wesley (1967).
4) F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons (1984).
5) C. Itzykson and J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc. (1986).
6) J. Beringer *et al.* [Particle Data Group Collaboration], *Phys. Rev. D* **86**, 010001 (2012).
7) T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, arXiv:1205.5368 [hep-ph].


（きくかわ・よしお，東京大学大学院総合文化研究科）

# アインシュタイン方程式と厳密解

前田　恵一

## 1. アインシュタイン方程式の誕生

太陽系天体の運動や地上の落体運動はニュートン重力理論で非常に良く記述される．この理論は，万有引力の法則と呼ばれ，2つの物体間に働く引力は距離の逆二乗則に従う．この重力 $\boldsymbol{F}$ は保存力で，ある物体の及ぼす重力はニュートンの重力ポテンシャル $\Phi$ の勾配（$\boldsymbol{F} = -\nabla\Phi$）により与えられる．そして万有引力の逆二乗則は次のポアッソン方程式に還元される．

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho. \tag{1}$$

ここで, $\Delta, G, \rho$ はそれぞれラプラス演算子, ニュートンの万有引力定数, 重力源の物質密度である．この (1) 式は $\Phi$ に関して線型の偏微分方程式であるので，解の重ね合わせが可能で，また，簡単に積分できるので，その性質はよく知られている．このニュートンの万有引力の法則は，様々な重力実験をよく説明するため，それを変更する必要は全くないと言って良かった．しかしながら，1905 年にアインシュタイン（A. Einstein）が特殊相対性理論を提唱し，それが正しいものと認識されると，ニュートンの重力理論の立場が危うくなった．つまりこの2つの理論が原理的に矛盾するのである．ニュートンの重力理論は，その方程式からわかるように，時間微分を含まない．それは，物体の密度分布が与えられると，瞬時にそのポテンシャルが決定され，物体に働く重力も決まる．ところが，特殊相対性理論では，物体の速さや情報伝播速度に上限があり，それを超えてはいかなる情報も伝えられない．重力が物体の密度分布が決まった瞬間に決まるというのはこの事実に反するため，この2つは矛盾するのである．

その結果，物理学者たちは，特殊相対性理論と矛盾しない重力理論，相対論的重力理論を求めて研究を始めた．アインシュタインもその一人である．このニュートン重力理論の相対論的一般化はそう簡単ではない．ラプラス演算子（$\Delta$）を相対論的なダランベール演算子（$\Box$）にすればいいというものではない．それは特殊相対性理論における質量とエネルギーの等価性に由来する．重力場 $\Phi$ も場であるのでエネルギーを持ち，それは等価性から質量密度 $\rho$ にも寄与するため，相対論化された方程式は必然的に非線型方程式になるはずである．

その困難を乗り越えたのが，やはりアインシュタインである．1907 年に思いついた「等価原理」を基礎に思考実験を重ね，1915 年末に一般相対性理論にたどり着く[1)]．この理論は，重力を曲がった時空により記述するという誰もが考えなかった発想に基づいている．これまでの物理学では，時間や空間はあくまで現象を記述するための便宜であって，物理的対象ではなかった．それが時空の歪みを重力場ととらえ，時空そのものを物理学の対象に引き上げたのである．そういう意味で，アインシュタインのこの理論は，相対論的重力理論ではなく，一般相対性理論と呼ばれる[1)]．

曲がった空間の数学的記述は，リーマン（B. Riemann）が考え出したリーマン幾何学により可能であった[2]．時間（1次元）と空間（3次元）の時空多様体 [座標：$x^\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$] を考えると，そこでは計量 $g_{\mu\nu}$ が定義されており，4次元時空の世界間隔 $ds$ が

$$ds^2 := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

で与えられる[*1]．アインシュタインの理論では，重力場がこの計量で表される．その結果，通常のリーマン幾何学では計量は与えられたものであるが，アインシュタインの一般相対性理論では，ニュートンの重力ポテンシャル $\Phi$ がそうであるように，計量は物理的状況に応じて求めるべきものとなる．その計量を決定する方程式はリーマン幾何学では与えられておらず，アインシュタインはそれを求めるのにさらに一苦労することになる．最終的にたどり着いたのが今日アインシュタイン方程式として知られている次の方程式である[2]．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

ここで $R_{\mu\nu}$ および $R$ は Ricci 曲率テンソルおよびスカラー曲率で，それらは

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &:= \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\ \mu\alpha}}{\partial x^\nu} \\ &\quad + \Gamma^\alpha_{\ \beta\alpha} \Gamma^\beta_{\ \mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\ \beta\nu} \Gamma^\beta_{\ \alpha\mu}, \\ R &:= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned}$$

で定義される．接続 $\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}$ は

$$\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right)$$

で与えられる．定義式からわかるように曲率は計量 $g_{\mu\nu}$ の2階微分で記述される．また $T_{\mu\nu}$ はそこに存在する物質のエネルギー・運動量テンソルである．一般相対性理論では計量が重力ポテンシャルを表していることを考えると，この式がニュートンの重力ポテンシャル $\Phi$ が満たすべき方程式 (1) の拡張であることは想像できるであろう．しかしながら，アインシュタイン方程式は多変数（計量は対称テンソルなので10個の独立成分を持つ）の非線型偏微分方程式になる．特にその非線型性は，解を求めるときの大きな障壁となり，誕生後100年を経過しようという現在でもその研究は続けられている[3]．

*1） 本稿ではアインシュタインの縮約則を用いる．

## 2. 時空物理学：宇宙論とブラックホール

一般相対性理論およびアインシュタイン方程式の研究は，数学的興味や量子論としての重力場の問題を除けば，主に宇宙論や宇宙物理学の一環として行われてきた．それは，重力がすべての物体に対して引力として働く「万有引力」で，対象とするスケールが大きくなればなるほど重要になる力であるからである．通常はニュートン重力理論で十分良く現象を記述できるが，重力が非常に強くなる状況では一般相対性理論が必要となる．

この一般相対性理論は，$g_{\mu\nu}$ に2つの意味を持たせたことにより，重力場を求めることは同時に時空の幾何学を決めることにもなった．アインシュタイン方程式は，まさに時空を決定する式なのである．これまでの物理学では，時間や空間はあくまで現象を記述するために人が手で与えたものであった．それがこの一般相対性理論により時空を物理学として決定できるのである．時空物理学の誕生である．

この理論を手にしたアインシュタインが真っ先に考えたことは「宇宙は科学的に理解できるか」ということだったのではないか．この宇宙がどのような構造をしているのか，どのように科学的に表されるのかが一般相対性理論によってわかるのである．きっと彼は興奮したことであろう．もっとも，アインシュタイン自身が考えた未来永劫続く不変の宇宙は彼の方程式と矛盾し，「宇宙項」なるものを導入する羽目になったのであるが[4]….

時空物理学の対象として新しく登場したのが「ブラックホール」である[5]．ブラックホール解は，アインシュタインが理論を提唱してすぐ，天文学者のシュヴァルツシルド（K. Schwarzschild）によって発見された（1916年）．シュヴァルツシルドは球

対称な星の外部の重力場を求めようとアインシュタイン方程式を解いたのであった．その計量は

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega^2 \qquad (2)$$

で表される．ここで $r_g = 2GM/c^2$（$M$：重力質量，$c$：光速）は重力半径，またはシュヴァルツシルド半径と呼ばれる*2)．

シュヴァルツシルドの解 (2) は，太陽などの星の外部では正しい重力場を与えるが，$r = r_g$ で特異になる．1910〜20 年代はこの「特異点」が問題となり，そのような半径が実在できるか大いに議論になった．アインシュタインは 30 年代にもそのような半径は実在しないという論文を書いているが，そのすぐあとの 1939 年に，オッペンハイマー（J.R. Oppenheimer）とシュナイダー（H. Snyder）が星の重力崩壊によりシュヴァルツシルド半径が現れることを示した．ブラックホールの誕生をはじめて示した重要な研究である．シュヴァルツシルドが見つけた解はブラックホール時空を表すアインシュタイン方程式の解なのである．

しかしブラックホールの本当の姿がわかったのは 60 年代に入ってからである[5]．時空構造の解析により，シュヴァルツシルド半径は，それを超えて落ち込むことはできるが，その内部からは光すら脱出できない一方通行の境界なのである．

この一般相対性理論の宇宙論への応用およびブラックホールの登場は現代宇宙物理学に多大な影響を与え，現在では，一般相対性理論なしに宇宙物理学は語れない．

前置きが長くなったが，以下ではこのアインシュタイン方程式の厳密解について見ていこう．

## 3. 時空の対称性

アインシュタイン方程式では，一般に変数は計量 $g_{\mu\nu}$ で，方程式はその非線型 2 階偏微分方程式で表される．計量は対称テンソルであるので 10 個の独立な成分がある．このアインシュタイン方程式を時間と空間方向に分離し，ハミルトン形式で表すと，4 つの拘束条件式と時間微分を含む 6 つの動的方程式に書き表せる．物質の密度分布や運動量分布が与えられると，この 4 つの拘束条件式を解くことで，計量の一部（longitudinal part）が決定される．実際，ニュートンポテンシャル $\Phi$ の式は，一つの拘束条件式の非相対論的極限である．また，一般相対性理論は，一般座標変換に対して理論が不変となる一般共変性があるので，座標系を自由に設定できる．この自由度を使うと動的な 6 つの変数の独立な自由度は 2 つになるが，これが時空の波動的振舞いを表す重力波の自由度である[6]．

このアインシュタイン方程式は，変数の多さもさることながら，その高い非線型性のため一般解を構成することはまず無理で，特殊解を求めることも非常に困難である．そこで現実的な系の解析をするために通常よく取られるのが，「対称性」を課して方程式を簡単化した後，解くという方法である[7]．実際，シュヴァルツシルドは静的球対称という条件の下に真空の（物質場がない場合の）アインシュタイン方程式を解き，式 (2) の解を求めた．アインシュタイン方程式最初の厳密解である．

この対称性を課して解を探すという方法には 2 つの研究対象がある．一つは，ブラックホールなどの相対論的天体で，もう一つが宇宙全体を対象とする宇宙論である．前者は，まず時間的な定常性を課し，空間的にも軸対称なものを考える．これは，非軸対称であると，回転している場合には四重極モーメントが時間変化し，重力波を放出するためエネルギーを失い，定常性と矛盾することになる．またこの場合，漸近的には重力の弱い平坦時空（ミンコフスキー時空）に近づく状況を考える．後者では，宇宙はならすとどこも同じであると考える「宇宙原理」を前提とする[4]．つまり空間的な対称性を課すのである．空間には並進対称性と回転対称性を考えることができ，その両方を課すと空間は 3 次元最大対称空間となり，3 種類（曲率ゼロ，負曲率，正曲率）の 3 次元空間が存在す

*2) 以後は $c = G = 1$ の単位系を用いる．

る．このような宇宙は，時間のみに依存する一つの計量変数 $a(t)$（宇宙の大きさを表すスケール因子）によりその進化が記述される．アインシュタイン方程式はその $a$ の時間変化を表す一つの常微分方程式に帰着される．この方程式をフリードマン方程式と呼ぶが，それは現代宇宙論の基礎方程式となっている．アインシュタイン方程式を数学的に解析するという意味では，もう少し緩い対称性を課した宇宙を考える場合がある．一様性，つまり“並進”対称性のみを課すのである．3 次元一様空間は，対称性を記述する 3 つのキリング・ベクトルの交換則により 9 つに分類されている（ビアンキ・タイプ I〜IX）．計量は時間のみに依存し，アインシュタイン方程式は非線型常微分方程式の力学系に帰着される[7]．

以下では一般相対性理論の 2 つの重要な研究対象であるブラックホール解と宇宙論的解について厳密解を考える立場から考察しよう．

## 4. ブラックホール解の一意性

ブラックホールとしては，軸対称定常時空を考えるので，一般に方程式は 2 変数の非線型偏微分方程式になる．当然，その解を求めるのは非常に大変で，実際，回転するブラックホール解をカー（R. Kerr）が見つけたのはシュヴァルツシルド解発見後，50 年も経過した 1963 年のことである．カー解は（カー自身が見つけた表現とは異なるが）

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &-\frac{\Delta}{\Sigma}(dt - a\sin^2\theta d\phi)^2 \\
&+ \Sigma\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) \\
&+ \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left[(r^2+a^2)d\phi - adt\right]^2, \\
\Delta := &\ r^2 - 2Mr + a^2, \\
\Sigma := &\ r^2 + a^2\cos^2\theta.
\end{aligned}
$$

ここで $M, a$ はそれぞれブラックホールの質量および単位質量あたりの角運動量である．このボイヤー・リンドキスト座標による解の表式は物理的理解がしやすいので，多くの相対論研究者が標準的に用いている[8]．

ブラックホールの解としては，その他にも電荷を持った球対称ブラックホール（ライスナー・ノルドシュトルム解）や，それを回転させたカー・ニューマン解が見つかっている．これらは，質量 $M$，角運動量 $J$ および電荷 $Q$ をパラメータとする一つの族（カー・ニューマン族）をつくっている．つまり，カー・ニューマン解で電荷をゼロにするとカー解，カー解で回転をゼロにするとシュヴァルツシルド解が得られる．

オッペンハイマーたちは球対称な星の重力崩壊の結果としてシュヴァルツシルド・ブラックホールがつくられることを示したが，自然界に存在する星は一般に回転している．そこで，星がエネルギー源を失い最終的に重力崩壊していくとき，どのようなブラックホール時空が実現されるのであろうか，ということが問題となる．時空が回転対称性を持っていないとすると，重力波を放出し，やがては定常状態に落ち着くだろうと考えられる．その結果，最終時空構造は軸対称であると考えられる．そこで，定常軸対称真空解を考え，事象の地平線の外に特異点が現れないと仮定すると，カー解が唯一のブラックホール時空となることが示される．イスラエル（W. Israel），ホーキング（S.W. Hawking），カーター（B. Carter），ロビンソン（D.C. Robinson）たちの一連の論文によって，このカー解の唯一性定理（1967〜75 年）が証明された[9]．これにより，カー・ブラックホールが唯一の最終時空解であるということが数学的に示されたのである．この唯一性定理は電荷まで入れるとカー・ニューマン解にまで拡張される．

その結果，ブラックホールは，質量 $M$，角運動量 $J$，電荷 $Q$ の 3 つの量で特徴づけられることになる．ブラックホールになる前の星にはいろいろな特徴が存在したが，ブラックホールになる段階で 3 つしか特徴（保存量）が残らないことになる．その 3 つの保存量を「毛」にたとえると，その 3 本の「毛」以外の情報はブラックホールになるとき消滅してしまうというのである．このことを，ブラックホールの名付け親であるホイラー（J.A.

Wheeler）は，『ブラックホールには毛がない』ともじり，「ブラックホールの無毛仮説」とよんだ．また，真空の場合（または電場を伴う場合）のカー解（カー・ニューマン解）の唯一性定理は「ブラックホールの無毛定理」とも呼ばれる．

## 5. 可積分性 vs. 非可積分性

アインシュタイン方程式は非線型方程式であるが，非線型系の２つの特徴的な側面を両方兼ね備えている．一つは，ソリトンに代表される「可積分性」[10]で，もう一つはカオスに代表される「非可積分性」[11]である．そのどちらの側面も研究されており，興味深い成果が得られている．

可積分になる例としては，前節で述べた軸対称定常時空がある．この時空には２つの対称方向（時間方向と軸まわりの回転）があり，それらを表すキリング・ベクトルは可換である．そのような場合，アインシュタイン方程式の一部[*3)]は，可積分系で重要となる「ラックス・ペア」の形に表すことができ，ソリトンなどを考えることが可能となる．その結果，ベックルンド変換や逆散乱法を使って既知の解から新しい解を構成することが可能となる．本特集では「厳密解」に関するトピックスが集められており，この厳密解を構成する方法を具体的に紹介することは重要と思われるが，紙面の都合上割愛する[10]．驚くべきことに，既知の解として自明のミンコフスキー時空を考えることで，カー時空を構成できる．

残念ながら，前節で述べたようにブラックホール解はカー時空に限られることが示されており，そのようにして構成されたカー時空以外の解にはすべて裸の特異点が現れ，ブラックホール解とはならない．もちろんこの方法が物質場を伴う場合にも拡張できれば，中性子星など特異点を含まない多様な解の構成も可能かもしれない．

また，この方法は２つの可換なキリング・ベクトルが存在すれば良いので，その２つを空間的なベクトルに取れば，面対称時空や円筒対称時空の動的な解の構成も可能である．

一方，非可積分な場合の議論としては，前述のビアンキ時空の解析がある．場のカオス的振舞いの解析は，本家の非線型物理学でもまだ十分な議論がなされておらず，アインシュタイン方程式の場合も力学系に帰着可能な一様なビアンキ時空の解析に留まる[7,11)*4)]．

ビアンキ時空のうち閉じたポテンシャルを持つタイプ IX がカオス的振舞いを示す．時空計量は

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\Omega} e^{2\beta_{ij}} \omega_i \omega_j$$

で表される．ここで，計量は時間 $t$ のみの関数で，$\beta_{ij}$ は非等方性を表す対角和ゼロの行列である．$\omega_i$ はビアンキ IX の不変基底を表す[7)]．このような時空のアインシュタイン方程式は次のようなハミルトン系に帰着できる．

$$S = \int d\Omega \left( p_+ \frac{d\beta_+}{d\Omega} + p_- \frac{d\beta_-}{d\Omega} - \mathcal{H} \right),$$

$$\mathcal{H} := p_+^2 + p_-^2 + 24\pi^2 e^{-4\Omega}[V(\beta_\pm) - 1].$$

ここでは，$\beta_{ij}$ が対角的になる場合 $[\beta_{ij} = \mathrm{diag}(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, -2\beta_+)]$ を考える．$p_\pm$ は $\beta_\pm$ の共役運動量である．また，ポテンシャル $V(\beta_\pm)$ は

$$V(\beta_\pm) := 1 + \frac{2}{3} e^{4\beta_+}[\cosh(4\sqrt{3}\beta_-) - 1] - \frac{4}{3} e^{-2\beta_+} \cosh(2\sqrt{3}\beta_-) + \frac{1}{3} e^{-8\beta_+}$$

で与えられるが，これは $\beta_\pm \to \infty$ で指数関数的に増大するポテンシャルとなっている（図 1）．

このポテンシャル障壁の存在により，非等方性を表す計量 $\beta_\pm$ は，$\Omega$ の減少する方向で何度も衝突・反射を繰り返し，曲がった三角形の境界のビリヤード問題のようになり，カオス的に振る舞う．$\Omega$ の減少するのは体積要素がゼロに近づく方向で，宇宙の特異点に向かってこの振舞いが見られる．宇宙が膨張する方向ではポテンシャルは減少し，壁で反射されなくなるのでカオス的振舞いは見られない．

---

*3）残りの方程式は，その解が得られてから解くことができる．

*4）与えられた時空のまわりでのテスト粒子のカオス的振舞いの解析はあるが．

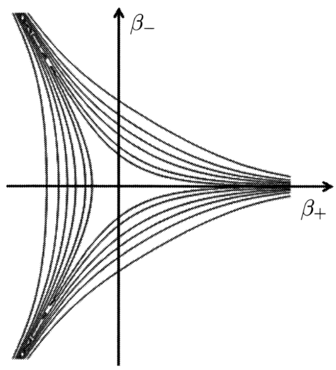



**図 1** ビアンキ IX 時空のポテンシャル等高線.

## 6. 時空の次元

厳密解の話に戻そう．アインシュタイン方程式は，非常に複雑な非線型偏微分方程式なので，厳密解を求めるのは大変ではあるが，さすがに約 100 年を経過した今は多くの解が見つかっている[3)]．その多くは必ずしも物理学的にはあまり興味深いものではないが，方程式の数学的構造を理解する上で重要であった．上述の逆散乱法などを用いた解析などもそのようにとらえることもできる．しかしながら，現実的に興味深い場合であるブラックホール解については，すでに述べたように解の一意性があり，カー時空が唯一の解である．

ところがこの特徴は時空次元が 4 の場合に限られる．素粒子統一理論の最有力候補である超弦理論では時空次元は 10 である．そこで 4 より大きな時空次元を想定した研究が，素粒子論のみではなく宇宙論やブラックホール物理学の分野で活発に行われている[12)]．

高次元時空を考える場合，現実的な我々の 4 次元世界を説明するには，コンパクト化という余剰次元（我々の世界を表す 4 次元以外の次元）を小さく丸め込む必要がある．その方法の不確定さから 4 次元有効理論を考えるときの解には非常に多くの可能性が出てきてしまい，予言性が低くなる．これは現代宇宙論の一つの大きな課題となっている．

高次元時空における重力そのものの理解のため，高次元一般相対性理論の（高次元時空でのアインシュタイン方程式を考える）研究も行われている．その過程で非常に興味深い解が見つかった．5 次元ブラック・リングである[13)]．4 次元ブラックホールはその地平線面のトポロジーが球であることが証明されている．しかし 5 次元時空では，地平線面のトポロジーがトーラスになる解が見つかったのだ．トポロジーが球面となる解は 5 次元時空でもすでに見つかっていたので，これは，5 次元ではブラックホール解は一意的ではないことを示している．実際，その後の研究でブラック・サターンやもっと多くの厳密解が見つかっている．つまり一般相対性理論と 5 次元以上の相対性理論ではその解の性質が大きく異なるのである．また 5 次元では前述の逆散乱法が適用でき，ブラック・リング解の構成も行われている．この高次元重力の研究はまだ始まったばかりで，これからの進展が期待されている[14)]．

### 参考文献


1) 前田恵一『重力理論講義』第 3 章（サイエンス社）.
2) 前田恵一『重力理論講義』第 4 章（サイエンス社）.
3) H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations: Second Edition* (Cambridge University Press).
4) 前田恵一『重力理論講義』第 6 章（サイエンス社）.
5) 前田恵一『重力理論講義』第 8 章（サイエンス社）.
6) 前田恵一『重力理論講義』第 7 章（サイエンス社）.
7) 前田恵一『重力理論講義』第 9 章（サイエンス社）.
8) 前田恵一『重力理論講義』第 11 章（サイエンス社）.
9) W. Israel, *Phys. Rev.*, **164** (1967), 1776; *Commun. Math. Phys.* **8** (1968), 245; B. Carter, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1970), 331; S.W. Hawking, The event horizon, in *Black Holes* eds. by C. De Witt and B.S. De Witt (1973, New York, Gordon and Breach), 5; S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The large scale structure of spacetime* (1973, Cambridge Univ. Press); D.C. Robinson, *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975), 905.
10) 前田恵一『重力理論講義』第 10 章（サイエンス社）.
11) 前田恵一『重力理論講義』第 12 章（サイエンス社）.
12) 前田恵一『重力理論講義』第 18 章（サイエンス社）.
13) R. Emparan and H.S. Reall, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101101 (2002).
14) *Higher Dimensional Black Holes*, Prog. Theor, Phys. Supplement Series No.189, edited by K. Maeda, T. Shiromizu, T. Tanaka (2011).



（まえだ・けいいち，早稲田大学理工学術院）

# イジング模型と厳密解

伊達 悦朗

## 1. はじめに

イジング模型は強磁性の研究に関連して1920年頃にLenzにより導入されました[1)]．1924年頃に彼の学生であったIsingが1次元の場合に分配関数を計算しました[2)]．その後Onsagerが2次元の場合の分配関数を厳密に計算したのは二十年近くも後の1942年頃のことです[3)]．外場がある場合，3次元以上の場合は今でも未解決となっています．2次元イジング模型は統計力学の基本的な問題の一つである相転移が厳密に示された最初の模型のうちの一つであり，またその後，その相関関数のスケール極限がPainlevé方程式の解を用いて表されることが示されたことなどもあり注目を集めているものです．社会科学のほうの文献にイジング模型という言葉をみかけることもあります．

Onsagerがこの問題に取り組むきっかけとなったのはKramers–Wannier[4)]による行列の方法およびdual transformationを用いた転移点（臨界温度）の決定にあったようです．Onsagerはこの変換を彼なりに再構成し，dual transformationが定義されるような一般の状況などについて考察し，これが2次元特有のものであることを見出したりしたとも，最初の論文で述べています．

ここではOnsagerおよびそれに続くKaufmanの計算の過程の最初の一部を振り返ってみたいと思います．すでに様々な形で採り上げられている内容ですが，今回はこれまであまり採り上げられてはこなかったOnsagerの最初の方法についても少しふれてみたいと思います．まず模型の説明をしましょう．

## 2. 2次元イジング模型

平面上の格子点（座標が整数であるような点）の集まりで，横に$n$個からなる格子点の並びが縦に$m$個あるようなものを考えます．これを長方形格子と呼び，横の並びを行，縦の並びを列と呼ぶことにします．番号は左から右へ，下から上へとつけることにしておきます．各格子点$(i,j)$に値が$\pm 1$であるような変数$\mu_{i,j}$を考えます．一つのイメージとしては格子点はそれぞれの原子を表し，$\mu_{i,j}$の二つの可能な状態のいずれかを表しているとも考えることができます．この格子上の状態とはそれぞれの変数$\mu_{i,j}$が可能な値のいずれかをとることに対応しているものとします．簡単のために，境界では変数は**周期境界条件**を満たしている，つまり$\mu_{n+1,j}=\mu_{1,j}, \mu_{i,m+1}=\mu_{i,1}$が成り立っているものとします．これだけでは原子の相互作用というイメージとはなりませんので，ある状態$\mu=\{\mu_{i,j}\}$のエネルギーを

$$E(\mu) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(J\mu_{i,j}\mu_{i,j+1} + J'\mu_{i,j}\mu_{i+1,j})$$

で定義します．ここで$J, J'$は正の定数で，エネ

ルギーが低い状態が安定であるものとすれば隣り合う変数が同じ値，つまりすべての変数が同じ値をとる場合にエネルギーは最小となります．この模型の**分配関数**は

$$Z = Z(T) = \sum_{\mu:\text{状態}} e^{-E(\mu)/kT}$$

で定義されます．ここで $T$ は絶対温度, $k$ はBoltzmann 定数です．今の場合，和は $2^{mn}$ 項からなります．問題は $m, n \to \infty$ としたときの $Z$ の計算，あるいはより正確には一点あたりの分配関数 (自由エネルギー) $\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \log Z$ の計算です．相転移が見られるかどうかはこの分配関数あるいはその導関数の特異点を調べることになることが統計力学で知られています．

## 3. 転送行列

まずこの分配関数を行列を用いて表しましょう．この考え方はKramers–Wannier[4)]，久保[5)]等によって導入されたものといわれています．以下で述べるものは行転送行列と呼ばれているものです．長方形格子の隣り合う二つの行にある変数を $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_m)$ とします．$J/kT = H$, $J'/kT = H'$ とおき，さらに $\sinh(2H)\sinh(2H^*) = 1$ なる関係で $H^*$ を定義します．同様に $H'$ に対し $H'^*$ を定義します．以下でしばしば出てきますので $\mathrm{sh}(x) = \sinh x$, $\mathrm{ch}(x) = \cosh x$ と略記することにします．このとき二つの $2^n$ 次の正方行列 $V_1$, $V_2$ をその $(\mu, \mu')$ 成分が

$$(V_1)_{\mu,\mu'} = \exp\left(H \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mu'_i\right),$$
$$(V_2)_{\mu,\mu'} = \delta_{\mu,\mu'} \exp\left(H' \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mu_{i+1}\right)$$

であるものと定義します．すると周期境界条件を課したことから，分配関数が

$$Z = \mathrm{trace}\,(V_1 V_2)^m$$

と $2^m$ 次の行列の積のトレースとして表されることが分かります．このことから分配関数を計算するには，**転送行列** $V_1 V_2$ の固有値，固有ベクトルを求めればよいことになります．つまり，行列 $V_1 V_2$ の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2^n}$ とすれば

$$Z = \sum_{j=1}^{2^n} (\lambda_j)^m$$

となります．また $m, n \to \infty$ なる極限を考えれば，自由エネルギーは，最大固有値の対数の極限として計算できることがわかります．$H^*$ は双対格子を考える際に出てきます．

## 4. Onsager の考察の一部

1944 年の論文の中で Onsager は転送行列の具体的な表示よりは，それが持つ抽象的な性質を考えるほうがよいと述べています．

次のような 2 次の正方行列を考えます．

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$sC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これらの行列は $\mathbf{C}^2$ に働き，四元数体を生成します．$\mathbf{C}^2$ の $n$ 個のテンソル積 $(\mathbf{C}^2)^{\otimes n}$ を考えて，その上の作用素 $s_j$, $C_j$ を

$$s_j = I \otimes I \otimes \cdots \otimes s \otimes I \otimes \cdots \otimes I,$$
$$C_j = I \otimes I \otimes \cdots \otimes C \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

で定めます．ここで $s$, $C$ は $j$ 番目にあるものとします．後にはこれらの作用素の添字も周期 $n$ で拡張して考えます．これらの作用素を用いて $A = \sum_{j=1}^{n} s_j s_{j+1}$, $B = \sum_{j=1}^{n} C_j$ とおけば，先ほどの転送行列は

$$V_1 = (2\mathrm{sh}(2H))^{n/2} \exp(H^* B),$$
$$V_2 = \exp(H' A)$$

と表されることがわかります．ここで

$$e^H + e^{-H} C_j = (2\mathrm{sh}(2H))^{1/2} \exp(H^* C_j)$$

という関係を用いました．

つまり転送行列は四元数体の $n$ 個の直積の元となっています．Onsager はさらにこの代数の同型，また $A, B$ の特性についてもふれて，この観点から Kramers–Wannier の dual transformation を論じています．

残念ながら二つの行列 $A, B$ は可換ではありませんので $V_1V_2$ は簡単には指数の形には表されません．そのために $A, B$ で生成される Lie 代数が問題となります．これは，このような行列の指数となっている二つの作用素をまとめるには指数にある行列の交換子積が必要となるという Baker–Campbell–Hausdorff の公式に対応しています．Onsager は次のように進んでいきます．

$$P_{aa} = -C_a, \quad P_{a,a+1} = s_a s_{a+1}$$

とおきます．これらは

$$C = C_1 C_2 \cdots C_n$$

とおくとき，$C$ と可換です．$C^2 = 1$ であることに注意しておきましょう．これらの作用素を用いれば先ほどの作用素 $A, B$ は

$$A = \sum_{a=1}^{n} P_{a,a+1}, \quad B = -\sum_{a=1}^{n} P_{aa}$$

と表されます．一般に

$$P_{ab} = s_a C_{a+1} C_{a+2} \cdots C_{b-1} s_b$$

と定義します．さらに

$$A_j = \sum_{a=1}^{n} P_{a,a+j}$$

と定義することにすれば，

$$A_0 = -B, \quad A_1 = A$$

と表されます．

$$A_{j+n} = -CA_j = -A_j C$$

が成り立っています．

$$G_j = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^{n} \left([P_{ax}, P_{a+j,x}] - [P_{xa}, P_{x,a+j}]\right)$$

と定義することにより，$\{A_j, G_j\}$ が

$$\begin{aligned} [A_j, A_k] &= 0, \\ [G_j, G_k] &= 0, \quad G_{-j} = -G_j, \\ [A_j, A_k] &= 4G_{j-k} \end{aligned}$$

なる Lie 代数を生成することがわかります．今日**オンサーガー代数**と呼ばれたりしているのはこの Lie 代数のことです．

## 5. オンサーガー代数

その後の研究によりオンサーガー代数は次のようにしても定義できることが知られています．つまり二つの生成元 $A_0, A_1$ が

$$\begin{aligned} [A_0, [A_0, [A_0, A_1]]] &= 16[A_0, A_1], \\ [A_1, [A_1, [A_1, A_0]]] &= 16[A_1, A_0] \end{aligned}$$

を満たしていれば，それらにより生成される Lie 代数がオンサーガー代数です．この 16 という数は本質的なものではなく 0 でない定数に置き換えることができます．言い方を換えれば，オンサーガー代数はアフィン量子展開環 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の冪零部分環の変形ともみなすことができます．あるいは $\mathfrak{sl}_2$ のループ代数のある対合に関する不動点からなる Lie 代数としてもとらえることができることが知られています．

オンサーガー代数は Onsager が 1944 年の論文で取り上げて以降しばらくは忘れられていたようですが，1982 年に Dolan と Grady[6] が 2 次元の場の理論を考え，二つの作用素 $A, B$ が上の関係を満たしていれば，それらの任意の一次結合 $A+kB$ に対して無限個な可換な作用素が存在することを示したこと，さらに 1985 年に von Gehlen と Rittenberg[7] が superintegrable な chiral Potts 模型のハミルトニアンがこのような構造を持っていることを見出したことから新たな関心を集めました．なお Onsager が後に振り返っている文章の中[8]にも Dolan–Grady の考えた形が現れていることに注意しておきたいと思います．2 次元イジング模型の場合には，さらに先ほどの関係から従

うように

$$A_{j+2n} = A_j, \quad G_{j+2n} = G_j$$

という関係が成り立っています．これにより2次元イジング模型に対応するLie代数は有限次元（$3n-1$次元）となります．後は有限フーリエ変換などを用いることにより，この有限次元Lie代数が四元数及びスカラーの直和となることを示し，それをもとに転送行列の固有値を求めていきます．相転移は$H' = H^*$を満たす温度（**臨界温度**）$T_c$で起こることが示されます．

## 6. Kaufmanによる扱い，フェルミオン

1945年頃にはOnsagerは転送行列の固有値の完全な記述に成功していたようですが，少し後に彼を訪ねたKaufman[9)]は次のように進めていきます．彼女は$\exp(a \cdot s_r s_{r+1})$, $\exp(b \cdot C_r)$，あるいはこれらの積が$2n$次元空間の回転群の$2^n$次元の表現となっていることを示します．そして，転送行列のすべての固有ベクトルもこの観点から求めることができることを示します．この結果，相関関数の計算も可能となっていきます．

1970年代に，Wu, McCoy, Tracy, Barouchは2次元イジング模型の2点相関関数の，温度を臨界温度（相転移点）に近づける際のスケール極限がPainlevéのIII型方程式の解を用いて表されることを示しました．ここでは彼ら4人の研究を契機として生まれたホロノミック量子場の理論[10)]に従いKaufmanの方法の一端を紹介したいと思います．

## 7. Clifford代数，Clifford群

そのために$2n$次元のClifford代数を用意します．定義を思い出しましょう．いま$W$を$\Gamma_k$ $(k=1,\ldots,2n)$で生成される$\mathbf{C}$上$2n$次元のベクトル空間とし，そこでの非退化双線型形式を$\langle \Gamma_i, \Gamma_j \rangle = \delta_{ij}$で定義します．$W$上のテンソル代数を$T(W)$とし，部分集合

$$\{ww' + w'w - \langle w, w' \rangle \,|\, w, w' \in W\}$$

で生成される$T(W)$の両側イデアルを$I(W)$とするときに，商代数$A(W) = T(W)/I(W)$を$W$上のClifford代数と呼びます．つまり$2n$個の生成元$\Gamma_k$で生成されるClifford代数とは，任意の元が$W$の元の積の一次結合で表され，次の反交換関係を満たしているものです．

$$\Gamma_k^2 = 1, \quad \Gamma_k \Gamma_l = -\Gamma_l \Gamma_k. \quad (1 \le k, l \le 2n)$$

次のような記法（反交換子）

$$[w, w']_+ = ww' + w'w$$

を導入すれば先ほどの関係式はまとめて

$$[\Gamma_j, \Gamma_k]_+ = 2\delta_{jk}$$

と表すことができます．この代数は，$(\mathbf{C}^2)^{\otimes n}$に，例えば，次のように表現されます．

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{2r-1} \mapsto C \otimes C \otimes \cdots \otimes s \otimes I = P_r, \\
&\Gamma_{2r} \mapsto C \otimes C \otimes \cdots \otimes isC \otimes I = Q_r. \\
&(1 \le r \le n)
\end{aligned}$$

ここで，$s, isC$は$r$番目の成分に現れます．これらの$P_r, Q_r$を用いて転送行列を表すことができます．

$$\begin{aligned}
V_1 &= (2\mathrm{sh}(2H))^{n/2} \prod_{r=1}^{n} \exp(iH^* P_r Q_r), \\
V_2 &= \prod_{r=1}^{n-1} \exp(-iH' P_{r+1} Q_r) \\
&\qquad \times \exp(iH' P_1 Q_n C)
\end{aligned}$$

となります．

このように転送行列はClifford代数の表現空間の元であることがわかりました．問題は$V_1 V_2$の固有値を求めることですが，そのためにClifford代数，Clifford群のことについてもう少し思い出しましょう．まず今の場合$A(W)$は$2^n$次の全行列環と同型で，中心は$\mathbf{C}$に同型で，$A(W)$の自己同型は内部自己同型で尽きます．

$A(W)$の可逆元$g$に対して，$T_g(a) = gag^{-1}$とおけば，$T_g$は$A(W)$の自己同型となります．こ

のことから

$$G(W)=\{g\in A(W)\mid g\text{は可逆},\ T_g(W)\subset W\}$$

とおきこれを **Clifford 群**と呼びます．Clifford 群については次のことが知られています．$T_g$ は $A(W)$ の自己同型ですから

$$\begin{aligned}\langle T_g(w),T_g(w')\rangle &= [T_g(w),T_g(w')]_+\\ &= T_g([w,w']_+)=\langle w,w'\rangle\end{aligned}$$

が成り立ちますので，先に述べた双線型形式に関する直交群を $O(W)$ で表すときに写像 $T:G(W)\to O(W)$ の核は $\mathbf{C}^\times$ です．さらに

$$G(W)=\{cw_1\cdots w_k\mid c\in\mathbf{C}^\times,\ w_i\in W,w_i^2\neq 0\}$$

と表されることがわかります．これらのことから，転送行列 $V_1V_2$ は Clifford 群の元となっていますから，その固有値を求める問題（対角化）は $2n$ 次元空間での対角化の問題に帰着されることがわかります．以下では相似変換をした行列 $V=V_2^{1/2}V_1V_2^{1/2}$ の固有値を求めていきます．

## 8. 転送行列の固有値，固有ベクトル

Clifford 代数の元

$$\epsilon=\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_{2n}$$

がすべての $\Gamma_j$ と半可換かつ $\epsilon^2=1$ であることを用いて

$$A^{(\pm)}=\{a\in A(W)|\epsilon a=\pm a\epsilon\}$$

とおくとき，

$$A(W)=A^{(+)}(W)\oplus A^{(-)}(W)$$

が成り立ちます．$\epsilon\mapsto C$ であることに注意し，

$$\mathcal{F}^{(\pm)}=\{v\in\left(\mathbf{C}^2\right)^{\otimes n}|Cv=\pm v\}$$

とおきます．すると上の分解に応じて

$$\left(\mathbf{C}^2\right)^{\otimes n}=\mathcal{F}^{(+)}\oplus\mathcal{F}^{(-)}$$

と分解されます．$V_1$ は $C$ と可換ですから $V_2^{(\pm)}=V_2|_{\mathcal{F}^{(\pm)}}$ とおいて，

$$V^{(\pm)}=\left(V_2^{(\pm)}\right)^{1/2}V_1\left(V_2^{(\pm)}\right)^{1/2}$$

の固有値を求めていくことにします．$V^\pm$ の $\pm$ に応じて $P_j$, $Q_j$ の添字を $P_{n+j}=\pm P_j$, $Q_{n+j}=\pm Q_j$ として拡張することにすれば

$$V_2^{(\pm)}=\exp\left(iH'\sum_{j=1}^n Q_jP_{j+1}\right)$$

とまとめて表すことができます．

そのためにまず $P_j$, $Q_j$ のフーリエ変換を考えます．$\theta_a=2\pi a/n$ とおき $a$ は $\pm$ の周期，反周期性に応じて

$$I^{(+)}=\left(\mathbf{Z}+\frac{1}{2}\right)/n\mathbf{Z},\ I^{(-)}=\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

上を動くものとします．このとき

$$\hat{p}_a=\sum_{j=1}^n P_je^{-ij\theta_a},\quad \hat{q}_a=\sum_{j=1}^n Q_je^{-ij\theta_a}$$

と定義します．これらの反交換関係は

$$\begin{aligned}[\hat{p}_a,\hat{p}_b]_+ &= 2n\delta_{a+b,0},\quad [\hat{p}_a,\hat{q}_b]_+=0,\\ [\hat{q}_a,\hat{q}_b]_+ &= 2n\delta_{a+b,0}\end{aligned}$$

で与えられます．ここで $\delta_{a,b}=1(a\equiv b\ n\mathbf{Z}),=0$（その他）です．転送行列の指数となっている元が引き起こす回転を調べることにより，$V^{(\pm)}$ の固有値，固有ベクトルは次のように記述されます．$\gamma(\theta)$, $\alpha(\theta)$ を次の関係式で定めます．

$$\begin{aligned}&\mathrm{ch}(\gamma(\theta))=\mathrm{ch}(2H)\mathrm{ch}(2H'^*)\\ &\qquad-\mathrm{sh}(2H)\mathrm{sh}(2H'^*)\cos\theta,\\ &\alpha(\theta)^{\pm}\mathrm{sh}(\gamma(\theta))=e^{\pm i\theta}\mathrm{sh}(2H'^*)\\ &\times(\mathrm{ch}(2H)\cos\theta-\mathrm{sh}(2H)\mathrm{ch}(2H')\mp i\sin\theta).\end{aligned}$$

続いてフェルミオンを定義します．

$$\begin{aligned}\psi_a^\dagger &= \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\hat{p}_a+i\alpha(\theta_a)^{-1}\hat{q}_a\right),\\ \psi_a &= \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\hat{p}_a-i\alpha(\theta_a)^{-1}\hat{q}_a\right).\end{aligned}$$

このフェルミオンを用い，$\gamma_a=\gamma(\theta_a)$ とおけば転

送行列が次のように表されます.

$$V^{(\pm)} = (2\mathrm{sh}(2H'))^{n/2} \times\exp\left(-\sum_{a\in I^{(\pm)}} \gamma_a \left(\psi_a^{(\pm)\dagger}\psi_a^{(\pm)} - \frac{1}{2}\right)\right).$$

さらに固有値は

$$(2\mathrm{sh}(2H'))^{n/2} \times\exp\left(\frac{1}{2}(\pm\gamma_{1/2} \pm \gamma_{3/2} \pm \cdots \pm \gamma_{n-1/2})\right),$$

$$(2\mathrm{sh}(2H'))^{n/2}\exp\left(\frac{1}{2}(\pm\gamma_0 \pm \gamma_1 \pm \cdots \pm \gamma_{n-1})\right)$$

で与えられます. $-$ の個数は, 上の式では偶数個, 下の式では $T < T_c$ の時は偶数個, $T > T_c$ のときには奇数個です.

対応する固有ベクトルは Clifford 代数に付随する Fock 表現を考えて構成することができます.

最大固有値は

$$(2\mathrm{sh}(2H'))^{n/2} \times\exp\left(\frac{1}{2}(\gamma_{1/2} + \gamma_{3/2} + \cdots + \gamma_{n-1/2})\right)$$

です.

## 9. おわりに

Onsager が 2 次元イジング模型の分配関数の計算を発表したときには世界中に大きな反響を巻き起こしたようです. ここでは Kaufman に従ってフェルミオンの考え方へと述べましたが, 南部[11]も独立に第二量子化の観点から同様の結果を得ています. dual transformation あるいはより一般の格子上でのイジング模型の研究についても当時日本からもいくつかの結果, 例えば文献 12, 13) が発表されていたことにも注意しておきたいと思います.

イジング模型については他にも多くの話題があります. その一つは自発磁化の計算結果についてです. 1948 年に Onsager が結果だけを発表しましたが詳細は発表せず. 後に 1952 年に Yang が論文を発表しました. Onsager 自身の自発磁化の計算をめぐる経緯についても先ほど引用した文章に述べられています. 角谷という名前も出てきます. 全くの余談ですが, 以前に読んだ追悼文の中に Onsager が Yale を退職するにあたり大学といくらかの摩擦があったような記述があり気にかかっていましたが, 最近長い間積んでおいた Chargaff の自伝『ヘラクレイトスの火』をながめてみたところ, Chargaff も Colombia 退職にあたり何事かあったように書いています. ほぼ同い年の二人のことですから, 当時のアメリカの大学のありようでしょうか.

### 参考文献


1) W. Lenz, Beiträge zum Verständnis der magnetischen Eigenschaften in festen Körpern, *Physik. Z.*, vol.**21** 613–615 (1920).
2) E. Ising, Beitrag zur Theorie des Ferromagnetisums, *Z. Physik*, vol.**31**, 253–258 (1925).
3) L. Onsager, Crystal Statistics I. A Two-dimensional Model with an Order-Disorder Transition, *Physical Review*, vol.**65**, 117–149 (1944).
4) H.A. Kramers and G.H. Wannier, Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I, II, *Physical Review*, vol.**60**, 252–276 (1941).
5) 久保亮五,「統計力學における一つの解析的方法」, 物性論研究, vol.**1**, 1–13 (1943).
6) L. Dolan and M. Grady, Conserved charges from self-duality, *Physical Review D*, vol.**25**, 1587–1604 (1982).
7) G. von Gehlen and V. Rittenberg, $\mathbf{Z}_n$-symmetric quantum chains with an infinite set of conserved charges and $\mathbf{Z}_n$ zero modes, *Nuclear Physics B*, vol **257**. 351–370 (1985).
8) L. Onsager, Autobiographical commentary of Lars Onsager, The Ising model in two dimensions, in *Critical Pheonemena in alloys, magnets, and superconductors*, xix–xxiv, 3–12, eds. R.E. Mills, E. Ascher and R.I. Jaffee, McGraw-Hill Book Company 1971.
9) B. Kaufman, Crystal Statics. II. Partition Function Evaluated by Spinor Analysis, *Physical Review*, vol.**76**, 1232–1243 (1949).
10) 神保道夫,『ホロノミック量子場』, 岩波書店 1998.
11) Y. Nambu, A Note on the Eigenvalue Problem in Crystal Statics, *Prog. Theor. Phys.*, vol.**5**, 1–13 (1950).
12) 伏見康治, 庄司一郎,『結晶統計と代数』, 岩波書店 1957.
13) R. Utiyama, Statistics of two-dimensional Ising Lattices of Chequered Type, *Prog. Theor. Phys*, vol.**6**, 907–909 (1951).


(だて・えつろう, 大阪大学大学院情報科学研究科)

# 流体力学の厳密解

岡本　久

## 1. はじめに

流体力学は流体のマクロな現象を研究する学問である．物理学の立場，工学の立場，数学の立場，など様々な立場によって見えてくる顔は違っているが，非線形偏微分方程式との取っ組み合いであるというのは共通していると思う．100年以上前にポアンカレ（Jules-Henri Poincaré, 1854–1912）が，「ナヴィエ–ストークス方程式の問題は難しいから，厳密解をとっかかりにして研究するのがいいだろう」と言ったと言われている．その後ナヴィエ–ストークス方程式の数学的な理論はずいぶん進化してきたとはいえ，わからないことも多い．というか，ナヴィエ–ストークス方程式の研究が進むと，それまでわからなかったことがわかると同時に，それとは別の不思議な問題が現れ，結局よくわかったとは言えない状態が続いてきたというのが私の持っているイメージである．したがって，ポアンカレの言葉は今でも生きているというのが実感である．

さて，厳密解と言ったときに何を意味するのか，まずそのことから始めよう．これには厳密な定義は存在しないと思う．大雑把に言って，ナヴィエ–ストークス方程式を厳密に満たす関数で初等関数やよく知られている特殊関数を使って比較的簡単に表示できるもの，というのがその定義であろう．どの程度簡単だったらいいのかは人ぞれぞれ主観に依存して決まるものと思う．例えば，初等関数で書き下せるもののみを厳密解ということもある．しかし，もう少し緩く定義することもある．例えば，ナヴィエ–ストークス方程式という非線形偏微分方程式の解がある種の常微分方程式に帰着されたら，たとえその常微分方程式の解が初等的に表されなくても「厳密解が得られた」ということもある．これは，常微分方程式ならば数値的に解くことはそう難しくはないことが多いので，常微分方程式に帰着された時点で「わかった」ということにしたものであろう．こうした例は後で紹介する．

筆者が数学科の学生だったころ，ガロア理論よりも環論よりもホモトピー理論よりも流体力学に魅せられたのは，実は**今井功**先生の教科書によるところが多い．今井先生の代表的な著書である『流体力学（前編）』[2]は40年くらいたった今でも輝きを失っていない．物理の人からも数学の人からも歓迎されている名著である．ここにはたくさんの厳密解があげられており，それらの多くは，不思議な手計算を要求するものであった．また，粘性係数がゼロの場合が大多数であるが，ラムの名著『流体力学』[3]にも厳密解は多い．中には非常にハードな手計算を要求するものもあるので，そういうことが好きな人にはたまらないのがラムの本であろう．『流体力学ハンドブック』[5]にも具体例は多い．厳密解のみを扱っている400ページ近い論文[4]もある．こうした不思議な計算に魅了されて流体力学の世界に入っていった人は私以外にもいるものと思う．そこで本稿では，すでに知られているも

のから始めて，いくつかを紹介したい．

表題は「流体力学の厳密解」であるが，KdV 方程式なども流体力学の方程式であるから，こうしたものの解も入ってしまうであろう．しかし，こうしたモデル方程式は本稿の対象外とし，ナヴィエ–ストークス方程式のみを考察することにしよう．

## 2. 初等関数で書けるもの

ナヴィエ–ストークス方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\nu\triangle\boldsymbol{u}-\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0. \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ は速度ベクトル場，$p$ は圧力，$\nu$ は動粘性係数，$\rho>0$ は流体の密度である．流体が占めている領域の境界では $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ という境界条件を課すことにする．

最も古いものはポワズィーユ流やクエット流であろう．

ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{u}=(g(t,y,z),0,0)$ という形であると仮定してみる．ここで，$g$ は $t$, $y$, $z$ の関数である．すると，容易にわかるように，非圧縮条件 (2) は自動的に満たされる．非線形項 $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ は恒等的にゼロとなることがわかる．(1) の第 1 成分は

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\nu g_{yy}+\nu g_{zz}-\frac{1}{\rho}p_x \tag{3}$$

となり，第 2, 第 3 成分からは $p_y=p_z=0$ を得る．これから，$p=p(t,x)$ がわかる．さて，もしも $p$ が既知関数であれば (3) は $g$ に関する熱方程式である．これは解の表示が可能であるから，$g$ もわかったものと見なすことができる．こうして一つの厳密解が得られる．

特別な場合を考えてみよう．$p(t,x)=cx$ で $c$ が定数とする．つまり，$p_x=c$ という圧力勾配が与えられているのである．さらに，$g$ は時間 $t$ に依存しないとしよう．すると，

$$g_{yy}+g_{zz}=\frac{c}{\rho\nu} \tag{4}$$

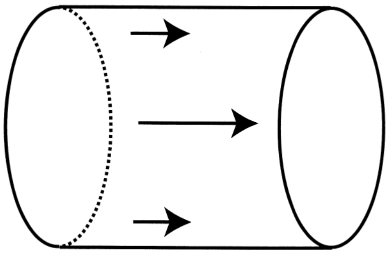


図 1　ポアズィーユの流れ．

が得られる．これはいわゆるポアソン方程式である．さらに状況を限定して，無限に長い円形の筒の中を流れている水を思い浮かべ（図 1），切り口を $y^2+z^2\le a^2$ とする．ここで，$a$ は切り口となっている円の半径である．速度ベクトル場は境界でゼロとならねばならないから，$y^2+z^2=a^2$ において $g=0$ が満たされねばならない．(4) をこの境界条件で解くと，

$$g(y,z)=\frac{c}{4\rho\nu}\left(y^2+z^2\right) \tag{5}$$

となる．すなわち，流れが初等関数で解けたわけである．

別の設定を考えよう．2 枚の無限に広がった平行な板の間を水が占めているとしよう．このとき，上の板が右に一定速度で平行にずれるものとし，下の板が反対方向に同じ早さで運動するものとする．このときには図 2 のように平行な流れが生ずる．うまく座標軸を選べば，速度ベクトル場は

$$\boldsymbol{u}=(cy,0,0)$$

となる（$c$ は定数である）．これを平面クエット流と呼ぶ．

こうした解は他の状況でも作ることができる．

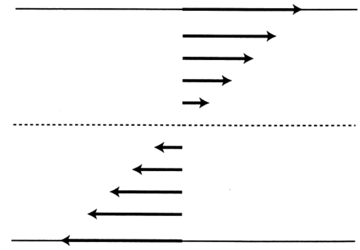


図 2　平面クエット流．

例えば無限に長い２つの同心円筒の間を水が満たしており，外の筒と内側の筒が一定の角速度（別々の角速度でよい）で回るときにも速度ベクトルが初等関数で書ける．これは通常，クエット流と呼ばれる．

さて，ポアズィーユ流が役立つのは管の中をゆっくりと水が流れているときである．このとき，単位時間内に管を流れる水の量は

$$\int_{y^2+z^2\le a^2} \frac{c}{4\rho\nu}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\pi c a^4}{8\rho\nu} \quad (6)$$

となる．すなわち，

単位時間内に管を流れる流体の量は，圧力勾配に比例し，直径の４乗に比例し，動粘性係数に反比例する．

を得るが，これはしばしばポアズィーユの法則と呼ばれている．

この説明はしかし，歴史的な事実から見たときには補足説明を要する．ポアズィーユ（フランスの内科医，Jean Louis Marie Poiseuille）は確かに 1840 年と 41 年に分かれて出ている一連の論文でこの法則を発表しているが，実は 1839 年にドイツ人のハーゲン（Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen）がこの法則を発表しているのである．したがって，

**ハーゲン–ポアズィーユの法則**

と呼ぶのが正確である．こうした重要な発見がほぼ同時に起きるのは決して稀なことではない．

もう一つ補足しておこう．多くの教科書では (5) を出発点にして積分 (6) を実行し，これがハーゲン–ポアズィーユの法則であると説明している．しかしこれは歴史的事実とは異なっているのである．ハーゲンもポアズィーユも実際に実験してその結果から彼らの法則を帰納しているのである．彼らの論文の中には放物型の速度分布 (5) は存在しない．この速度分布は 1860 年になってようやくハーゲンバッハ（Eduard Hagenbach）というスイス人によって発見されている．ハーゲンやポアズィーユの実験に遅れること 20 年である．

以上の説明については文献 6) を参照されたい．

## 3. ヒーメンツの流れ

前節の流れは 19 世紀に知られていたものであるが，非線形項が恒等的にゼロとなる解であるから，確かにナヴィエ–ストークス方程式の解であるとはいってもストークス方程式の解となってもいるので，それほど重要度が高いとは思えない．非線形項の役割がゼロであるからである．

20 世紀になると非線形項がゼロとはならない様々な解が見つけられてきた．ドイツの有名な流体力学者**プラントル**（Ludwig Prandtl, 1875–1953）の周辺の人々が見つけた解がそうしたものである．その中で最も古いものであるヒーメンツ（Karl Hiemenz）の解を紹介しよう．

流れは２次元的なものとし，平面において $y$ 軸が壁となって，上半平面 $\{y>0\}$ 全体を水が占めているものとする．このとき，無限遠方から水が流れてきて壁に垂直にぶつかるものとする（図 3）．1911 年，ヒーメンツは次のような特殊な形の解を思いついた：

$$\boldsymbol{u} = (x\phi'(y), -\phi(y)).$$

ここで $\phi$ は $y$ のみの関数である．こうすると，非圧縮条件 (2) は自動的に満たされる．(1) からは

$$x\left(\phi'^2 - \phi\phi'' - \nu\phi'''\right) = -\frac{1}{\rho}p_x, \quad (7)$$

$$\phi\phi' = -\nu\phi'' - \frac{1}{\rho}p_y \quad (8)$$

を得る．(8) からただちに $p_{xy}=0$ を得る．これと (7) から

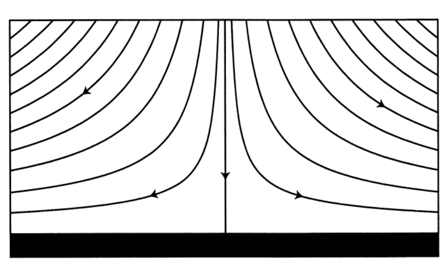


**図 3**　ヒーメンツの流れ．

$$\phi'^2 - \phi\phi'' - \nu\phi''' = \gamma \quad (0 < y < \infty) \quad (9)$$

を得る．$\gamma$ は定数である．境界では $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ でなければならないから，$\phi(0) = 0$ と $\phi'(0) = 0$ を得る．もしも定数 $\gamma$ が与えられたものであるならば，方程式 (9) はコンピュータを使って解くことができる．その数値データにもとづいて流れの様子を描いたのが図 3 である．

ヒーメンツの流れは現在でもその変形およびアイデアが使われることがあり，$\boldsymbol{u} = (x\phi'(y), -\phi(y))$ というアイデアは様々に応用できる．もっと一般的な解は拙著[1)]や文献 4) に見ることができる．

### 3.1 非定常な解

ヒーメンツの解は時間に依存しない解（定常流）である．これを時間に依存する形にしたものが 1924 年にリアブチンスキー（Dimitri Riabouchinsky）によって発見された．1961 年にプラウドマン（Ian Proudman）とジョンソン（Kathleen Johnson）によって再発見されたこの方程式は $\phi = \phi(t, y)$ に関する次の微分方程式で定まる：

$$\phi_{tyy} + \phi\phi_{yyy} - \phi_y\phi_{yy} = \nu\phi_{yyyy}.$$

この解も境界層への応用など様々に使われており，さらなる一般化も存在し，興味ある対象である[1)]．

## 4. ジェフリー–ハーメル流

ヒーメンツよりは少し遅れるが，別の形の解がイギリス人ジェフリーとドイツ人ハーメルによって独立に発見された[1)]．これはいくつかの解釈が可能であるが，無限に長い扇形領域の流れと見なすのが一番自然である（図 4）．

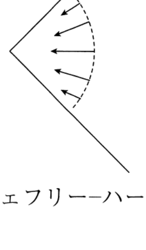


図 4　ジェフリー–ハーメル流．

図 4 は無限に広がった開き角 90° の扇形で，その角のところから水を吸い込んでいるところである．吸い込む量あるいは吹き出す量を $Q$ とすると，

$$R \equiv \frac{Q}{\nu}$$

は無次元のパラメータとなる．これの大きさによって様々な解が現れる．これは解の分岐の問題として取り扱うことができる[1)]．$R$ は正でも負でもよい．正のときには水が湧き出しており負のときには（図 4 の場合）吸い込んでいるものとしよう．

ナヴィエ–ストークス方程式を極座標で表して，前々節と同じように解析してみると，計算はいささか複雑になるが，1 本の常微分方程式に帰着することがわかる．速度ベクトル場は $\theta$ 成分を持たず，$r$ 成分のみを持つ．そして，その $r$ 成分は

$$\frac{g(\theta)}{r}$$

という形になることがわかっている．その詳細については拙著[1)]にあるので，ここでは計算は省略するが，$g$ が満たす方程式は次のようなものであることがわかる：

$$g'' + g^2 + 4g = b \qquad (-\alpha < \theta < \alpha).$$

ここで $g$ は極座標における角度 $\theta$ のみの関数で，$b$ は未知定数であり，$\alpha$ は扇形の開き角の半分である（図 4 の場合は $\alpha = 45°$）．また，

$$R = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

という関係式も成り立たねばならない．前にも述べたように，こうした常微分方程式に帰着された時点で厳密解と呼ぶ流儀もあるから，これもその意味で厳密解である．$g$ の方程式の解は楕円関数で書けるので，これを厳密解と呼んでも差し支えはなかろう．

さて，どういった解が存在するであろうか？ 答えは $R$ が正の場合と負の場合で全く違う．また，$R = 0$ のときには

$$g \equiv 0, \quad b = 0$$

は確かに解であるが，不思議なことにそれ以外の

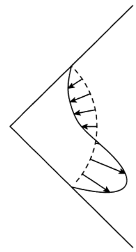


**図 5**　ジェフリー–ハーメル流．$R=0$ の非自明な解．

解もある．その例を図 5 に記すが，要するに出ていく流量と入ってくる流量が同じなので $R=0$ となっているが，恒等的にゼロではないのである．

$R>0$ があまり大きくなると，全面的に外向きに流れる解は存在しないことが知られている．一方，$R<0$ で $|R|$ がどんなに大きくても全面的に内向きの解が存在することが知られている．これは通常，次のように解釈されている．

口から喉へ息を吸い込むときには，空気はスムーズに入ってくるが，息を吐き出すときには，一方向の層流としては実現されず，逆流が不可避となる．

ジェフリー–ハーメル流は**境界層**を正確に表示する解としても重宝する．$R<0$ として $|R|$ を大きくしていくときにそれがはっきりと見て取れる (図 6)．$\theta=\pm\alpha$ の近く (壁近く) を除いて，$g$ は定数関数に近づくことがわかる．一方で，$\theta\approx\pm\alpha$ の近くでは急激に変化して壁のところではちょうどゼロとなる．この急激な変化が起きているところが境界層である．その厚さは $O(\sqrt{\nu})$ のオーダーであるというのがプラントルの理論が予測するところである．境界層の理論は物理学的な理論であり，数学的な証明を実行しようとすると困難に出くわすのが普通であるが，上の例ではこれを厳密に証明することができる．この意味で貴重な例となっている．

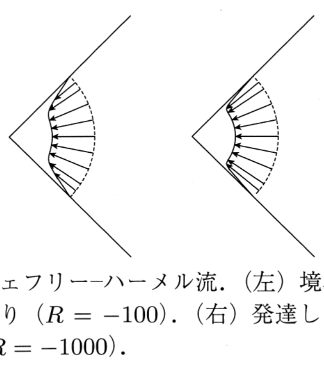


**図 6**　ジェフリー–ハーメル流．(左) 境界層の始まり ($R=-100$)．(右) 発達した境界層 ($R=-1000$)．

## 5. ルレイの方法

1934 年ルレイ (Jean Leray, 1906–1998) は次の方程式を考えた

$$\triangle \boldsymbol{U}-\nabla P=\boldsymbol{U}+(\xi\cdot\nabla)\boldsymbol{U}+(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}, \quad (10)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{U}=0, \quad (11)$$

ここで，$\boldsymbol{U}=(U_1,U_2,U_3)$ と $P$ は $\xi\in\mathbf{R}^3$ のみの関数である．このとき，

$$\boldsymbol{u}(t,x)=\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2(T-t)}}\boldsymbol{U}\left(\frac{x}{\sqrt{2\nu(T-t)}}\right),$$

$$p(x)=\frac{\rho\nu}{2(T-t)}P\left(\frac{x}{\sqrt{2\nu(T-t)}}\right)$$

とおくと，$\boldsymbol{u}$ と $p$ はナヴィエ–ストークス方程式を満たすことがわかる．このような解は自己相似な解と呼ばれることが多い．うまく $\boldsymbol{U}$ を選べば，$t\to T$ のときに無限大になる解が得られ，いわゆる「爆発解」が得られることになる．ルレイはこれが乱流の解明につながるという期待を持っていた．こうして，解の爆発によって乱流が始まるという仮説は，乱流に関する**ルレイのシナリオ**と呼ばれている．

ルレイのシナリオはしかし，(11) の解がなかったら意味をなさない．現在では，(11) のエネルギー有限の解は存在しないことがわかっており，ルレイのシナリオはそのままでは成り立たないことがわかっている．しかし，エネルギー有限という制限を取り払えば解はいくらでも作ることができる[7]．

**例**：上半平面 $\{(\xi_1,\xi_2)\,;\,0<\xi_2<\infty\}$ における流れを考え，

$$\boldsymbol{U}(\xi_2)=1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(\frac{\xi_2^2}{2}\right)\int_{\xi_2}^{\infty}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)d\eta.$$

これは方程式と境界条件を満たす．速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ は，$t \to T$ のとき，

$$u_1 = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2(T-t)}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\nu}{x_2} + O(|T-t|)$$

を満たす．つまり，これは厚さ $O\left(\sqrt{\nu(T-t)}\right)$ の境界層を示す．もちろん，有限時間で無限大になるからと言って，有名なミレニアム問題が解けたことにはならない．エネルギーが無限大の解のクラスの中での話だからである．

## 6. 最後に

厳密解をいろいろと見てきたが，これはどの程度役立つものであろうか？ KdV 方程式ではソリトン解は中心的な役割を果たしているし，その他の可積分系でも厳密解の果たす役割は大きい．ナヴィエ–ストークス方程式の場合確かにポアンカレの言うような役割は果たしているけれど，レイノルズ数が大きいところでは，どうであろうか？解は乱流となるわけであるから，厳密解が乱流に関する何らかの知見を与えてくれればいいが，そううまくはいかないであろう．やはり厳密解は層流に対してのみ役立つものであろう．こういう意味で厳密解の限界はおのずと存在するわけであるが，それにしても新しい厳密解を見つけると，砂の中からきれいな貝殻を見つけ出したときの子供のような喜びが湧いてくる．こうした喜びを見つける人は今後も少しずつ出てくるであろう．

### 参考文献


1) 岡本 久,『ナヴィエ–ストークス方程式の数理』, 東京大学出版会 (2009).
2) 今井 功,『流体力学（前編）』, 裳華房 (1973).
3) ラム,『流体力学 I–III』, 今井 功 & 橋本英典（訳）, 東京図書 (1978)–(1988).
4) R. Berker, Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, *Handbuch der Physik*, **VIII**/2 (1963), 1–384.
5) 『流体力学ハンドブック 第 2 版』,（日本流体力学会編）, 丸善 (1998).
6) L. Schiller (編), Drei Klassiker der Strömungslehre: Hagen, Poiseulle, Hagenbuch, *Ostwald's Klassiker* (1933).
7) H. Okamoto, *Japan J. Indus. Appl. Math.*, **14** (1997), 169–197.



（おかもと・ひさし，京都大学数理解析研究所）

# 弦の場の理論における厳密解

大川　祐司

## 1. はじめに

重力はアインシュタインの一般相対性理論で記述され，ミクロな世界は量子力学で記述されますが，一般相対性理論と量子力学を矛盾なく統一して記述することができず，理論物理学における長年の宿題となっています．弦理論はこの難問に重要な手がかりを与えると期待されている理論で，活発に研究されています．今回は弦理論の研究における一つのアプローチである弦の場の理論で，2005 年に私の友人でもある Schnabl が構成した厳密解[1)]に関する話をしたいと思います．

## 2. 弦理論

素粒子論は，この自然界が何からできていて，どのような法則に従っているかを調べる物理学の分野です．例えば，コップの中の水は水分子が集まったもので，水分子は水素原子と酸素原子が化学的に結合したもので，水素原子や酸素原子などの原子は陽子と中性子からなる原子核とまわりを回る電子からできていて，陽子や中性子はクォークからできています．クォークは現在のところ 6 種類が見つかっていて，陽子や中性子はアップクォークとダウンクォークからできています．現時点ではクォークや電子が何かからできているという実験的な徴候はなく，クォークや電子は現時点での**素粒子**です．

**弦理論**は，これらの素粒子が実はひものように広がった弦であると考える理論です．弦はとても小さいので，現時点での実験では粒子にしか見えませんが，弦がどのように振動しているかによって質量やスピンなどの性質が異なる粒子のように振る舞います．

## 3. 場の量子論

身近なものは，ほとんどアップクォーク，ダウンクォーク，電子からできているわけですが，光はどうでしょう．光は電場や磁場の振動状態である電磁波です．電磁場の振幅は連続的に変化できて，エネルギーも連続的に変化できるように思えますが，振幅が小さくなると電磁場を量子力学を用いて記述しなければならなくなり，ある方向に進んでいる光のエネルギーは連続的な値を取れなくなります．取り得るエネルギーの最小値が存在し，取り得るエネルギーの値はその整数倍だけになり，ちょうど粒子がその整数の数だけあるような状況です．このような振舞いから，光も素粒子からできていると言うことができ，そのように考えるときの素粒子のことを**光子**と呼びます．私たちが通常目にしている光は，光子が巨視的な数だけ集まったものです．また，電場や磁場のような場を量子力学的に扱う理論は**場の量子論**と呼ばれています．

光子に対応する場が電磁場であるように，実は電子やクォークのような素粒子にも対応する場があり，例えば電子と陽電子の対生成や対消滅などの過程を記述するときなどには電子の場を用いて場の量子論で記述します．このように，電子と光という全く異なるように思えるものが，場の量子論という枠組みでは統一的に扱われます．

一方，重力は重力場という場を用いて記述され，電磁気力での Maxwell 理論に相当するのが一般相対性理論なのですが，冒頭で述べたように，一般相対性理論を量子力学的に場の量子論の枠組みで記述しようとするとうまくいきません．

## 4. バックグラウンド

私が初めて場の量子論を学んだとき，場を量子力学的に扱うことによって素粒子を表すということがなかなかしっくりと理解できなかった記憶があります．場というと電場や磁場が代表的な例ですが，電場や磁場の運動方程式に相当するのは Maxwell 方程式です．電荷の分布が与えられたときにどのような電場ができるかや定常電流の分布が与えられたときにどのような磁場ができるかは，Maxwell 方程式を解くことによって決まります．これらの電場や磁場は Maxwell 方程式の古典解である，もしくは**バックグラウンド**であるという言い方をします．そして電場や磁場の値がバックグラウンドの値のまわりでさざ波のように振動している状態を量子力学的に扱ったものが光子です．

最も単純なバックグラウンドは，電場の値も磁場の値もゼロというバックグラウンドでしょう．しかしバックグラウンドはこれだけではありません．例えばコンデンサーの電極間にはほぼ一様な電場ができますが，これもバックグラウンドの一つです*1)．さらに場の量子論の古典解，すなわちバックグラウンドにはもっとエキゾチックなものもあります．例えば Maxwell 方程式の古典解には，磁石の N 極だけが単独で存在するような磁気単極子という解があります*2)．他にも超伝導体中の磁束の渦糸のような構造を持つバックグラウンドもあります．これらのような古典解は**ソリトン解**と呼ばれていて，これらのバックグラウンドのまわりの場の量子論でソリトンと光子などの素粒子の散乱過程などを記述することができます．

*1) 一般に，バックグラウンドのまわりでの量子力学的なさざ波である素粒子の性質はそのバックグラウンドに依存します．少し余談になりますが，つい最近の 2012 年 7 月 4 日に，スイスのジュネーブの郊外にある CERN という研究所で行われている大型加速器実験で，質量が 125 ギガ電子ボルトぐらいの新しい素粒子が発見されたという発表がありました．そしてこれが素粒子の標準模型で存在が仮定されている通常 Higgs 場と呼ばれている場が記述する粒子であると考えることと今のところ矛盾がない実験結果であるようです．素粒子の性質は一般にバックグラウンドに依存すると書きましたが，例えば電子などの質量は，Higgs 場のバックグラウンドによって変わります．Higgs 場のバックグラウンドがゼロのときには質量がゼロである素粒子が，Higgs 場のバックグラウンドがゼロでなくなると質量を持つようになります．

*2) 実は通常の Maxwell 方程式では特異的な解なのですが，少し複雑に拡張された電磁場の理論では特異性のない解が存在します．そしてその拡張というのは，通常の Maxwell 理論を場の量子論で厳密に扱おうとするときに生じる問題（漸近的自由性がないという問題）を解決する典型的な方法で，かつ電子の電荷の絶対値と陽子の電荷の絶対値が驚くべき精度で一致していることにも反映されている電荷の量子化を予言するような拡張です．

## 5. 弦理論とバックグラウンド

弦理論では，バックグラウンドは Maxwell 方程式のような運動方程式の解として決まるのではなく，あるバックグラウンドを仮定してみて，そのまわりで弦が量子力学的に矛盾なく運動できるかという条件から決まります．例えば，平坦な時空で，電場や磁場などがすべてゼロの場合は，時空が 10 次元のときだけ弦は量子力学的に矛盾なく運動できます．弦が自分の住む時空の次元さえも決めてしまうということは，弦理論の顕著な性質の一つです．また，このような矛盾のないバックグラウンドのまわりで弦はその振動状態によって様々な粒子のように振る舞うわけですが，その中に電磁場での光子に相当する，重力場における重力子が含まれています．重力場のバックグラウンドのまわりのさざ波のような振動を場の量子論の枠組みで記述しようとするとうまくいかなかったのが，弦理論ではうまく記述できるのです．量子力学と矛盾しないような形で重力が含まれているということも弦理論の顕著な性質の一つです．

このように魅力的な弦理論ですが，問題点もあります．その一つの側面は先ほど述べたバックグラウンドの決まり方に関係しています．このことを説明するために，以下のような簡単化した例を考えてみます．今，$\phi$ という場があるとして，時間や空間に依存しない一様なバックグラウンドを決める運動方程式が

$$V(\phi) = 180\,\phi^2 + 14\,\phi^3 - \frac{41}{4}\,\phi^4 - \frac{2}{5}\,\phi^5 + \frac{1}{6}\,\phi^6 \quad (1)$$

として

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = \phi\,(\phi+5)\,(\phi+3)\,(\phi-4)\,(\phi-6) = 0 \quad (2)$$

で与えられるとします．この $V(\phi)$ は**ポテンシャル**と呼ばれる関数で，図 1 に図示してあります．バックグラウンドとなり得る運動方程式の解は $\phi = -5, -3, 0, 4, 6$ ですね．弦理論ではこれらの値がバックグラウンドになり得るということは判定でき，そのまわりでの弦の散乱過程などを記述することができるのですが，バックグラウンド一つ一つに対して独立に理論が定義されていて，バックグラウンドの相互関係は分かりません．図 1 の例では，$\phi = -5, -3, 0, 4, 6$ の 5 箇所の無限小近傍の情報が分かるだけで，$V(\phi)$ というポテンシャ

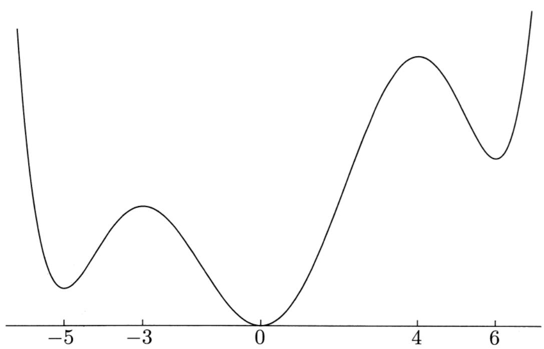


図 1　ポテンシャルの例．

ルの全貌は分からないということになります．そもそも様々なバックグラウンドが普遍的な力学的自由度の集合で記述できるかどうかも分からない，言ってみれば弦理論の基本的な自由度は何なのかが特定できていないという根源的な問題です．

## 6. 弦の場の理論

このような問題に対する一つのアプローチとして，弦を場の量子論を用いて記述するということが考えられます．前述しましたように，弦理論では電子や光子などの素粒子は弦の特定の振動状態であると考える理論ですから，電子や光子などの素粒子のそれぞれに対応する場を導入すれば，場の量子論が使えるはずです．このような理論は**弦の場の理論**と呼ばれています．

弦の場の理論は，弦理論がバックグラウンドのそれぞれに対して独立に定義されているという問題点を原理的には克服し得る理論的な枠組みで，自然なアプローチです．しかし，弦理論の研究は驚くような方向の進展をしていて，例えばある 10 次元の曲がった時空をバックグラウンドとする弦理論は，ある 4 次元の場の量子論と等価である，言い換えると 10 次元の弦理論と 4 次元の場の量子論が物理的には同じ系を記述するという，AdS/CFT 対応と呼ばれる仮説が提唱されていて，その証拠が蓄積されています．10 次元と 4 次元ではそもそも次元が違うと思われるかもしませんが，3 次元的な像の情報を 2 次元面のホログラムに記録するような記述法であることから，ホログラフィックな記述と呼ばれることもあります．このような進展をふまえると，弦理論の基本的な自由度は弦の場の理論で考えているものとは全く異なるものなのかもしれません．しかし，現時点では様々なアプローチを相補的に組み合わせて弦理論の研究を進めていくべき段階であるように思えます．そして先ほど述べたような様々なバックグラウンドの相互関係の理解という問題は，弦の場の理論というアプローチが有効な問題の一つです．

## 7. 不安定なバックグラウンド

再び図 1 のポテンシャルの例に戻り，バックグラウンドの安定性について考えてみましょう．これは Newton 力学で物体の運動を記述するときのポテンシャルと同じようなもので，$\phi = 0$ というバックグラウンドから $\phi$ の値を少しずらすと $\phi = 0$ のまわりで振動します．もう少し正確に言うと，$\phi$ は場ですから時間や空間の関数であり，その振動というのは電磁波のようなものです．この状況は $\phi = -5$ や $\phi = 6$ でも同じですが，$\phi = -3$ や $\phi = 4$ ではどうでしょう．もしも $\phi$ の値をバックグランドの値から少しずらすと，振動せずにバックグラウンドの値から離れていってしまいます．このような $\phi = -3$ や $\phi = 4$ は**不安定なバックグラウンド**です．

これは簡単化した例でしたが，もっと複雑なバックグラウンドでも不安定なものはあります．例えばソリトンが不安定で崩壊してしまうような場合には，対応するソリトン解は不安定なバックグラウンドになります．弦理論でも場の量子論のソリトンに相当するようなものとして **D ブレーン**というものがあります．そして D ブレーンの中には不安定なものもあります．それでは D ブレーンが崩壊したらどうなるのでしょう．図 1 の例で言えば，$\phi = -3$ から $\phi$ の値を正の方向に少しずらしたらどうなるかというような問題ですが，前述したように弦理論では $\phi = -3$ の無限小近傍の情報しか分からないので答えることは困難です．Sen は，ある種の不安定な D ブレーンは持っているエネルギーを放出してなくなってしまい，対応する不安定なバックグラウンドからちょうど D ブレーンのエネルギーの分だけポテンシャルが下がったところにより安定なバックグラウンドがあるのではないかと考えました．D ブレーンのエネルギーは弦理論で計算できますので，これはポテンシャルに関する定量的な予言になります．そしてこの予言は，弦の場の理論を用いれば検証することができます．Sen と Zwiebach は，この検証を試みました[2)]．

## 8. 弦の場の理論の数値解

弦には無限種類の振動状態がありますから，弦理論が記述する粒子は無限種類あることになります．弦の場の理論では，それらの一つ一つの粒子に場を割り当てるので，無限種類の場の理論ということになります．また，弦が広がりを持つことに対応して，弦の相互作用は局所的ではありません．そのため，弦の場の理論の運動方程式は，微分を無限回含む非線形な偏微分方程式になっています．ここで思わずあきらめたくなってしまいますが，無限種類の場を，有限個に制限するという近似を考えてみます．通常，記述する粒子の質量が軽い順に場を選んでいく**レベル切断法**という近似が用いられますが，実はこの近似は系統的な近似方法にはなっておらず，うまくいく必然性はありません．それでも仕方がないのでやってみましょう．

最初は無限個の場をたった一つにしてしまうという level 0 という近似を考えます．その一つの場を $t$ として，ポテンシャル $V(t)$ を計算すると

$$V(t) = 2\pi^2\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{27\sqrt{3}}{64}t^3\right) \tag{3}$$

のようになります．ここでポテンシャルは D ブレーンのエネルギーを単位にしています．すなわち，ポテンシャルに極値があり，極値でのポテンシャルの値が $-1$ になっているというのが Sen の仮説の予言になります．このポテンシャルは図 2 に図示してあります．さて，

$$\frac{dV(t)}{dt} = 0 \tag{4}$$

を解くと，

$$t = t_* = \frac{64}{81\sqrt{3}} \tag{5}$$

に極値があることが分かります．極値 $t_*$ でのポテンシャルの値は

$$V(t_*) = -\frac{4096\pi^2}{59049} \simeq -0.68 \tag{6}$$

であり，予想値 $-1$ の約 68% です．無限個の場をたった一つにしてしまった割には悪くない結果です．

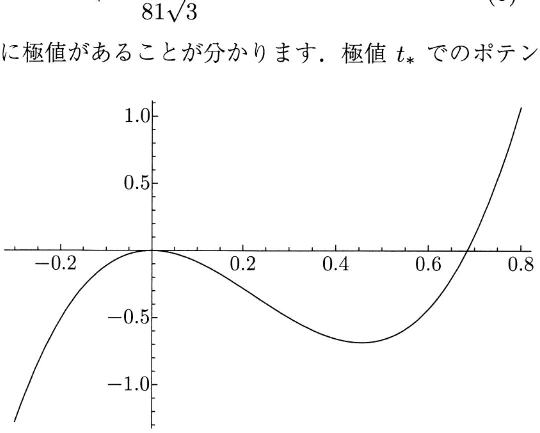



図 2　Level 0 近似でのポテンシャル．

この level 0 近似の結果に勇気づけられましたので，次に無限個の場を 3 つの場にする level 2 という近似をしてみます．先ほどの level 0 での $t$ に新たに $u$ と $v$ という場を加え，$t$, $u$, $v$ の 3 変数のポテンシャル $V(t,u,v)$ を計算すると

$$\begin{aligned} V(t,u,v) = 2\pi^2 \Bigg( & -\frac{1}{2}t^2 + \frac{27\sqrt{3}}{64}t^3 \\ & -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{33}{64}\sqrt{3}\,t^2u - \frac{15}{64}\sqrt{39}\,t^2v \\ & +\frac{19}{64\sqrt{3}}tu^2 + \frac{581}{192\sqrt{3}}tv^2 - \frac{55}{96}\sqrt{\frac{13}{3}}\,tuv \\ & +\frac{1}{64\sqrt{3}}u^3 - \frac{20951}{5184\sqrt{39}}v^3 \\ & -\frac{95}{1728}\sqrt{\frac{13}{3}}\,u^2v + \frac{6391}{5184\sqrt{3}}uv^2 \Bigg) \end{aligned} \tag{7}$$

となります．このポテンシャルの極値の条件

$$\frac{\partial V(t,u,v)}{\partial t} = \frac{\partial V(t,u,v)}{\partial u} = \frac{\partial V(t,u,v)}{\partial v} = 0 \tag{8}$$

は $t$, $u$, $v$ に関する連立 2 次方程式ですが，解析的には解けず，数値的に解くと

$$t_* \simeq 0.544\,,\ u_* \simeq 0.190\,,\ v_* \simeq 0.202 \tag{9}$$

で与えられる $(t,u,v) = (t_*,u_*,v_*)$ が極値になっています．極値でのポテンシャルの値は

$$V(t_*,u_*,v_*) \simeq -0.959 \tag{10}$$

となり，Sen の予想値 $-1$ の約 96% です．Sen と Zwiebach は次の level 4 近似まで計算しましたが，その後より高い level の近似計算がなされ，Gaiotto と Rastelli は 2002 年に level 18 近似の計算をしました[3)]．表 1 に level 12 までの結果がまとめてあります[*3)]．レベル切断法は系統的な近似方法ではないと述べましたが，ポテンシャルに極値があり，極値でのポテンシャルの値が Sen の予想値 $-1$ に非常に近いということは，私には偶然とは思えません．この結果は，Sen の仮説に対する証拠とも考えられますが，弦の場の理論が異なるバックグラウンドの相互関係を記述することができるということに対する証拠とも考えられます．

---

*3)　ちなみに現在の世界記録は level 26 です[4)]．

**表 1**　極値でのポテンシャルの値．

| level | ポテンシャルの値 |
|---|---|
| 4 | −0.987822 |
| 6 | −0.995177 |
| 8 | −0.997930 |
| 10 | −0.999183 |
| 12 | −0.999822 |

## 9. Schnabl の厳密解

1999 年の Sen と Zwiebach の論文以降，レベル切断法に基づく弦の場の理論の数値的な解析が活発に行われましたが，厳密解は見つからないままでした．そして盛り上がっていた弦の場の理論の研究が落ち着いてきた 2005 年に，私の友人でもある Schnabl が厳密解の構成に成功したというニュースが飛び込んできました[1)]．

弦の場の理論は無限種類の場の理論ですが，無限個の場をばらばらに扱うのでは大変で，無限個の場を**弦の場**と呼ばれるものにまとめて取り扱います．弦の場というのは，2 次元の共形場の理論の状態で，共形場の理論というのは座標系を等角写像で変換する対称性がある理論です．この性質は共形不変性と呼ばれますが，この共形不変性をうまく利用すると状態である弦の場を取り扱いやすくなります．この辺りの詳細は文献 5) に書きましたので，興味のある方はご覧下さい．

弦の場を $\Psi$ とすると，弦の場の理論の運動方程式は

$$Q\Psi + \Psi^2 = 0 \tag{11}$$

と表すことができます[6)]．ここで $Q$ は 2 次元の共形場の理論の BRST 演算子と呼ばれるもので，弦の場の積 $\Psi^2$ は 2 つの弦の場から一つの弦の場をつくる Witten の star 積と呼ばれる積を用いて定義されています．その名前が示すように弦の場 $A$ と弦の場 $B$ の star 積は $A * B$ と書かれることが多いのですが，今回は $*$ という記号は省略することにします．

このように弦の場を用いると運動方程式は単純な形に書けますが，弦の場を無限種類の成分場にばらすとこの式は前述したような複雑な微分方程式になります．Schnabl はどうやって厳密解を求めたのでしょうか．運動方程式には BRST 演算子 $Q$ がかかる項と Witten の star 積が用いられる項がありますが，Schnabl は $Q$ をかけるという操作と star 積を取るという操作に関して閉じている弦の場の部分空間を見つけました．すなわち，この部分空間内の弦の場に $Q$ をかけたものもこの部分空間に属していますし，この部分空間内の 2 つの弦の場の star 積もこの部分空間に属しています．この部分空間内の弦の場で解が構成できる可能性があるわけです．次に，この弦の場の部分空間にうまい基底を導入しました．Schnabl が $\mathcal{L}_0$ と表記した演算子の固有値で部分空間を分割するのですが，$\mathcal{L}_0$ の固有値が $h_1$ である弦の場と $\mathcal{L}_0$ の固有値が $h_2$ である弦の場の star 積を $\mathcal{L}_0$ の固有値で分解すると，$h_1 + h_2$ より小さい固有値は現れないことが分かります．一方，BRST 演算子 $Q$ は $\mathcal{L}_0$ と可換で $\mathcal{L}_0$ の固有値を変えません．このような $\mathcal{L}_0$ の固有値に基づく基底を用いることにより，$\mathcal{L}_0$ の固有値の小さいほうから順に運動方程式を解いていくことができ，解は $\psi_0, \psi_0', \psi_0'', \psi_0^{(3)}, \ldots$ と表記される一連の弦の場を用いて以下のようになります．

$$\begin{aligned}\Psi \;=\; & -\psi_0 + \frac{1}{2}\psi_0' - \frac{1}{6}\frac{\psi_0''}{2!} + \frac{1}{30}\frac{\psi_0^{(4)}}{4!} \\ & -\frac{1}{42}\frac{\psi_0^{(6)}}{6!} + \frac{1}{30}\frac{\psi_0^{(8)}}{8!} - \frac{5}{66}\frac{\psi_0^{(10)}}{10!} \\ & +\frac{691}{2730}\frac{\psi_0^{(12)}}{12!} - \frac{7}{6}\frac{\psi_0^{(14)}}{14!} + \cdots .\end{aligned} \tag{12}$$

みなさん，一般形は予想できますでしょうか？ Schnabl は，$\psi_0^{(12)}$ の項の係数の分子に 691 があることから，係数がベルヌーイ数であるということが分かったそうです．こうして解が求まり，さらに得られた解のエネルギーを計算し，Sen の予想値と一致することを解析的に示しました[1)]．

## 10. KBc 代数

Schnabl の解の構成法はいろいろと複雑な面もあるのですが，突き詰めて考えていくと，解は 3 種類の弦の場 $K$, $B$, $c$ を構成要素としていて，それらは star 積に関して

$$\begin{aligned}&[K,B]=0\,,\ \{B,c\}=1\,,\\ &c^2=0\,,\ B^2=0\end{aligned} \tag{13}$$

という性質があり，BRST 演算子 $Q$ がかかると

$$QB=K\,,\ QK=0\,,\ Qc=cKc \tag{14}$$

のように変換されるということだけで説明できることが分かりました[7)]．3 つの弦の場のうち $K$ はボソンのように Grassmann 性が偶で，$B$ と $c$ はフェルミオンのように Grassmann 性が奇です．BRST 演算子 $Q$ も Grassmann 性が奇なので，任意の弦の場 $\phi$ に対して

$$\begin{aligned} Q(K\phi) &= (QK)\phi + K(Q\phi) = K(Q\phi)\,, \\ Q(B\phi) &= (QB)\phi - B(Q\phi) \\ &= K\phi - B(Q\phi)\,, \\ Q(c\phi) &= (Qc)\phi - c(Q\phi) \\ &= cKc\phi - c(Q\phi) \end{aligned} \tag{15}$$

となり，これらの式を再帰的に使うことにより一般に $Q$ でどのように変換されるかを求めることができます．また，$K$, $B$, $c$ から構成される弦の場のエネルギーを求める一般的な表式もあります．(13) 式と (14) 式は **KBc 代数**と呼ばれ，近年の弦の場の理論の研究で重要な役割を果たしています．

このような $K$, $B$, $c$ を用いて Schnabl の解を表してみましょう．任意の負でない実数 $n$ に対して

$$\begin{aligned} \psi_n &= e^{K/2} cBe^{nK} ce^{K/2}\,, \\ \psi'_n &= \frac{d\psi_n}{dn} = e^{K/2} cBKe^{nK} ce^{K/2} \end{aligned} \tag{16}$$

という弦の場を定義すると，Schnabl の解 $\Psi$ は

$$\Psi = \lim_{N\to\infty} \left[ \sum_{n=0}^{N} \psi'_n - \psi_N \right] \tag{17}$$

のように書くことができます．一般的に $f(K)$ を $K$ の関数として，

$$\Psi = f(K)\, c \frac{BK}{1 - f(K)^2}\, c\, f(K) \tag{18}$$

が運動方程式の解になっていることを KBc 代数を用いて示すことができ[7]，Schnabl の解は形式的には $f(K) = e^{K/2}$ という場合に対応しています．ここで形式的に対応すると書いたのは，$f(K) = e^{K/2}$ とすると

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{K/2} c \frac{BK}{1 - e^{K}} ce^{K/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{K/2} cBKe^{nK} ce^{K/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi'_n \end{aligned} \tag{19}$$

となるという意味で，実は $n$ に関する級数の収束性を考えると，(17) 式に書かれているように $n$ の和を $N$ までにして，$\psi_N$ を引いてから $N$ を無限大にする極限を取る必要があります．この $\psi_N$ の項は phantom 項と呼ばれていて，$N$ を無限大にする極限で $\psi_N$ の成分場はすべてゼロになってしまうのですが，エネルギーの計算の際には有限の寄与をするお化けのような項です．ちなみにベルヌーイ数 $B_n$ との関係は，

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n\, x^n}{n!} \tag{20}$$

というベルヌーイ数の定義から，解を

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{K/2} c \frac{BK}{1 - e^{K}} ce^{K/2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} e^{K/2} cBK^n ce^{K/2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, \psi_0^{(n)} \end{aligned} \tag{21}$$

のように展開することによって分かります．

## 11. おわりに

Witten が弦の場の理論を構成したのは 1986 年ですから，Schnabl の解は約 20 年経過して初めて得られた厳密解ということになります．Schnabl の解が発表された当時は，この特定の問題に対してのみ厳密に解けるということなのか，もっと普遍的な進展なのか分かりませんでした．その後，2007 年に別の厳密解を構成することに成功し[8]，普遍性のある進展であるという展望が開けてきました．さらにこれらは電子などのフェルミオンは含まないボソニックな弦の場の理論という簡単化した理論の厳密解だったのですが，2007 年にはフェルミオンも含む超弦の場の理論の厳密解も構成することに成功しました[9]．また，厳密解の構成のみならず，散乱振幅の解析的な計算への応用など，様々な方向での解析的手法の進展につながっています．

### 参考文献


1) M. Schnabl, *Adv. Theor. Math. Phys.* **10**, 433 (2006) [hep-th/0511286].
2) A. Sen and B. Zwiebach, *JHEP* **0003**, 002 (2000) [hep-th/9912249].
3) D. Gaiotto and L. Rastelli, *JHEP* **0308**, 048 (2003) [hep-th/0211012].
4) I. Kishimoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **188**, 155 (2011).
5) 大川祐司，数理科学 2012 年 1 月号 14–21.
6) E. Witten, *Nucl. Phys. B* **268**, 253 (1986).
7) Y. Okawa, *JHEP* **0604**, 055 (2006) [hep-th/0603159].
8) M. Schnabl, *Phys. Lett. B* **654**, 194 (2007) [hep-th/0701248 [hep-th]]; M. Kiermaier, Y. Okawa, L. Rastelli and B. Zwiebach, *JHEP* **0801**, 028 (2008) [hep-th/0701249 [hep-th]].
9) T. Erler, *JHEP* **0707**, 050 (2007) [arXiv:0704.0930 [hep-th]]; Y. Okawa, *JHEP* **0709**, 084 (2007) [arXiv:0704.0936 [hep-th]]; Y. Okawa, *JHEP* **0709**, 082 (2007) [arXiv:0704.3612 [hep-th]].



（おおかわ・ゆうじ，東京大学大学院総合文化研究科）

# 数理生態学における厳密解



上山　大信

## 1. はじめに

ある限られた領域に何らかの生物が先住種として生息していたとしよう．例えば人間によって元来そこには存在しなかった種がもたらされ，先住種と侵入種の間に生活場所や餌をめぐった競争が生じ，場合によっては侵入種によって先住種が絶滅させられることがあるだろう．競争関係にどのような条件があれば，先住種の絶滅が生じるのであろうか．一方，生物は競争関係にありながらも，限られた領域内に共存している場合も見受けられる．共存のための条件とは何であろうか．侵入と伝播に関する数理生態学にはその他様々なトピックスがあるが[2)]，ここでは特に競争–拡散系とよばれる方程式において求まる進行波解の厳密解を紹介し，数理生態学における厳密解の有効性を紹介する．

## 2. 競争–拡散系

上記のような生物種の空間的な広がりと競争による個体数の増減は，次の競争–拡散系によって記述され，このモデルを用いて数多くの研究がなされている．$u_i(x,t)$ を時刻 $t$, 位置 $x$ における $i$ 番目の種（$i=1,2,\cdots,n$）の個体群密度とすると，

$$u_{i_t} = d_i\Delta u_i + (r_i - a_i u_i - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_j)u_i,$$

$$t>0,\quad x\in\Omega. \tag{1}$$

ここで，$d_i$, $r_i$, $a_i$, $b_{ij}$ はそれぞれ正の定数であり，拡散率，内的自然増加率，種内競争係数，種間競争係数（$i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n$）とよばれる．また，$\Omega$ は $\mathbb{R}^N$ の閉領域である．最も単純な場合は，$n=2$ の場合であり，次のような方程式となる．

$$\begin{cases} u_{1t} = d_1\,\Delta u_1 + (r_1 - a_1\,u_1 - b_{12}\,u_2)\,u_1, \\ u_{2t} = d_2\,\Delta u_2 + (r_2 - b_{21}\,u_1 - a_2\,u_2)\,u_2, \end{cases} \tag{2}$$

さらに，初期条件および境界条件としては次を与える．

$$u_1(x,0)=u_{10}(x)\geq 0,\quad u_2(x,0)=u_{20}(x)\geq 0, \tag{3}$$

$$u_{1\boldsymbol{n}}(x,t)=u_{2\boldsymbol{n}}(x,t)=0,\quad \text{for}\quad t>0, x\in\partial\Omega. \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は境界 $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルである．この問題では，もしも領域が凸であれば，すべての空間非一様な定常解は**存在したとしても不安定**であることが知られている[5)]．そこで，上記問題に対しては拡散効果を排除した，次の**常微分方程式系の定常解**が十分時間経過した後の状況を知る上で大変重要である．

$$\begin{cases} u_{1t} = (r_1 - a_1\,u_1 - b_{12}\,u_2)\,u_1, \\ u_{2t} = (r_2 - b_{21}\,u_1 - a_2\,u_2)\,u_2. \end{cases} \tag{5}$$

パラメータが多くあるが，例えば種内競争が他の競争に比べて強い場合，すなわちパラメータに対して次のような関係

$$\frac{a_1}{b_{21}} < \frac{r_1}{r_2} < \frac{b_{12}}{a_2} \tag{6}$$

がある場合を考えると，(5) の定常解は，$(u_1{}^*, u_2{}^*) = (\frac{r_1}{a_1}, 0)$ および $(0, \frac{r_2}{a_2})$ となる．さらに，$\lim_{t\to\infty}(u_1(x,t), u_2(x,t)) = (\frac{r_1}{a_1}, 0)$ または $(0, \frac{r_2}{a_2})$ の一方が，殆どすべての初期条件 (3) において成り立つ．つまり，この系においては**競争排他**が起き，最終的には2種のうちどちらか一方のみが生き残ることがわかる．

それでは，いったいどちらの種が生き残るのであろうか．空間1次元問題については**進行波解**を調べることによってその答えを知ることができる．進行波解を考えるために，$a$, $b$, $c$, $d$ を正定数として次のように問題を書き換えよう．

$$\begin{cases} u_t = \ \ u_{xx} + (1 - u - c\,v)\,u, \\ v_t = d\,v_{xx} + (a - b\,u - v)\,v. \end{cases} \tag{7}$$

先の (6) に対応する条件は，次のようになる．

$$\frac{1}{c} < a < b. \tag{8}$$

一定波形，一定速度で進む進行波解は，その速度を $\theta$ とすると $\mathbb{R}$ において，$(u(z), v(z))$ $(z = x - \theta\,t)$ とかけるから，(7) は，$-\infty < z < +\infty$ に対して次のようになる．

$$\begin{cases} -\theta u_z = \ \ u_{zz} + (1 - u - c\,v)\,u, \\ -\theta v_z = d\,v_{zz} + (a - b\,u - v)\,v, \end{cases} \tag{9}$$

また，境界条件は次を与える．

$$\begin{aligned} &(u(-\infty), v(-\infty)) = (0, a), \\ &(u(+\infty), v(+\infty)) = (1, 0). \end{aligned} \tag{10}$$

(9), (10) の解 $(u(z), v(z))$ と $\theta$ が唯一つ存在することは参考文献4) にて示されている．ここで，もしも速度 $\theta$ が負であれば，種 $U$ に対応する $u$ が，最終的に全領域を占めると期待される．つまり，種 $U$ は種 $V$ よりも強いと言えるだろう．もしも $\theta$ が正であれば状況はその逆となる．すなわち，速度 $\theta$ の符号と (9) 内のパラメータの依存関係を知ることができれば，種 $U$ および種 $V$ のどちらが最終的に生き残ることができるかを知ることができるが，一般に $\theta$ の値を求めることは難しい．しかしながら，あるパラメータ領域においてではあるが，(9), (10) については，進行波解 $(u(z), v(z))$ の厳密解が得られている[6,7]．例えば，パラメータが次のような関係

$$d = \frac{1}{3c}, \quad b = 2 + \frac{5a}{3} - a\,c, \quad \frac{1}{c} < a < b \tag{11}$$

を満たすとき，(9) の進行波解は $(a, c)$ をパラメータとして次のように表される．

$$u(z) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{2ac}}{4}z\right)\right], \tag{12}$$

$$v(z) = \frac{a}{4}\left[1 - \tanh\left(\frac{\sqrt{2ac}}{4}z\right)\right]^2. \tag{13}$$

このとき，進行波の速度 $\theta$ は，次の式で与えられる．

$$\theta = \frac{-2 + ac}{\sqrt{2ac}}. \tag{14}$$

図1は，$a = 1$, $c = \frac{29}{15}$ とした場合（$b = \frac{26}{15}$, $d = \frac{5}{29}$）の進行波解 $(u(z), v(z))$ のプロファイルである．

このように，空間1次元競争–拡散系における進行波解の厳密解は，競争関係にある種の競争関係の強弱について明確な答えを与える．どちらの種が生き残るかという疑問に対する答えは，有界領域におけるコンピュータシミュレーションを行えばわかるが，パラメータ依存性を含めた情報が得

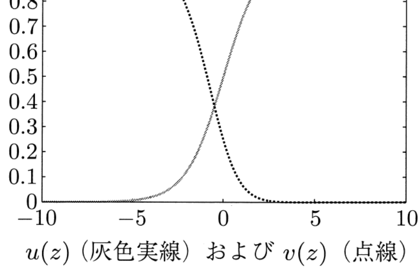



**図1**　$u(z)$（灰色実線）および $v(z)$（点線）のプロファイル[1)].

られる厳密解が得られれば大変有用である．

## 3. 3 種競争–拡散系

生態学の問題の一つとして競争緩和共存がある．すなわち，競争関係にある 2 種に対して，新たに異なる競争種の侵入がある場合に，元々ある 2 種間に競争排他が起こるのか，競争緩和共存が起こるのかを知ることは重要である．2 種間に競争関係があり，先の例のように競争排他が起こる状況に対して，他の競争種が競争に加わることによって種 $U, V$ 間の競争関係に変化が起こるであろうか？ それを知るために，3 種競争–拡散系を考える必要がある．まずは $0 \leq x \leq L$ における次の空間 1 次元 3 種競争–拡散系を考え，コンピュータシミュレーションによって侵入の影響を調べよう．

$$\begin{cases} u_t = d_1\Delta u + (r_1 - a_1 u - b_{12} v - b_{13} w)\, u, \\ v_t = d_2\Delta v + (r_2 - b_{21} u - a_2 v - b_{23} w)\, v, \\ w_t = d_3\Delta w + (r_3 - b_{31} u - b_{32} v - a_3 w)\, w. \end{cases} \tag{15}$$

境界条件および初期条件は次のように与える．

$$\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \\ v_x(0,t) = v_x(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \\ v(x,0) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ w(x,0) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

3 種系では，拡散項を取り除いた連立常微分方程式についてもその解析は容易ではない．詳しい説明は参考文献 1) に譲るが，種 $W$ が全く存在しない状況（$w(x,0) = 0$）においては，$U$ および $V$ の 2 種競争系であって，その場合のパラメータ設定は，前節と同じ，すなわち (6) とする．このとき，上記の初期値に対して $U$ と $V$ からなる進行波の速度は負となることは前節で見た．

そこに，$U$ および $V$ に対して弱い種が $W$ が $U$ および $V$ が重なっている部分に時刻 $t = t_1$ において進入，すなわち $w(x, t_1) = w_1(x)$ という設定で数値実験を試みる．ここに，$w_1(x) = \alpha\,\eta(x)$ であって $\eta(x)$ は $[0,1]$ の一様乱数であり，$\alpha$ は侵入種 $W$ の侵入量に対応するパラメータである．種 $W$ がどのような意味で弱いかについては考察が必要であるが，パラメータに対して次の条件を課すことが $U$ および $V$ に対して $W$ が弱いということに対応する（詳しくは参考文献 1) を参照）．

$$\begin{aligned} &\frac{a_1}{b_{21}} < \frac{r_1}{r_2} < \frac{b_{12}}{a_2}, \\ &\frac{a_2}{b_{32}}, \frac{b_{23}}{a_3} < \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{a_3}{b_{13}} < \frac{r_3}{r_1} < \frac{b_{31}}{a_1}. \end{aligned} \tag{18}$$

この系をコンピュータを用いてシミュレーションし，その結果を見てみよう．図 2 (a) および (b) は，そのシミュレーション結果である．横軸は空間であり，縦軸上に向かって時間経過を示している．初期条件としては，領域のおよそ左半分を種 $V$ のみとし，およそ右半分を種 $U$ のみとした上で，しばらく時間が経過後の $U, V$ からなる進行波に近い状態を得た上で図を作成している．図 2 (a) および (b) ともに，初期状態は種 $W$ を含まない種 $U$ と種 $V$ による競争が生じている状態であり，先の進行波解の速度が負であった事に対応して，競争が起こっている部分（図中黒線）が，左方向に一定速度で進行している．両図において時刻 $t = 20$ に注目すると，種 $W$ の進入を示す横線が見える．まず，図 2 (a) を見てみよう．種 $W$ の進入によって進行波解はわずかに影響を受け，一時的に速度の変化が見られるが，しばらく経過すると元の速度に復帰する．一方，図 2 (b) を見ると，種 $W$ の進入によって右方向に進む進行波らしき波が現れ，最終的に領域内は種 $V$ のみが存在する状況となる．すなわちこの数値実験結果は，種 $U, V$ 間の強弱関係が種 $W$ の侵入によって入れ替わる場合があり，それらの違いはパラメータ $\alpha$ によって引き起こされていることが示唆される．

図 2 (b) において $t = 20$ 以降，はじめ左方向に進行していた波が $t = 100$ 付近ではほぼ一定速

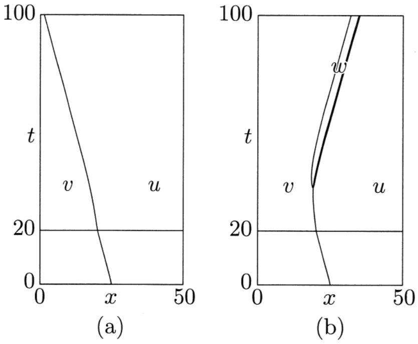



**図 2**　時刻 $t = 20$ に，$U$ および $V$ のオーバーラップ部分に $W$ が侵入した場合の時間発展[1)]．$d_i = 1$, $a_i = 1$, $r_i = 28$ $(i = 1, 2, 3)$, $b_{12} = \frac{22}{21}$, $b_{21} = \frac{37}{21}$, $b_{23} = \frac{3}{4}$, $b_{32} = \frac{22}{21}$, $b_{13} = 4$, $b_{31} = \frac{26}{21}$．(a): $w_1(x)$ が比較的小さい場合（$\alpha = 1.5$），(b): $w_1(x)$ が比較的大きい場合（$\alpha = 2$）．

度で右方向に進むに波となっている．$t = 20$ 以前の左方向に進む波は，$w = 0$ に注目すれば，先に扱った空間 1 次元 2 種競争–拡散系の進行波解に近いであろうことは容易に想像できる．一方，右方向に進む波は，図 3 のようなプロファイルであり，種 $W$ が種 $U$ および種 $V$ の重なり部分に存在していることがわかる．

右方向に進む波について，先ほどの 2 種競争–拡散系と同様に，進行波解を調べるために次の問題を考える．

$$\begin{cases} -\theta\, u_z = d_1\, u_{zz} + (r_1 - a_1\, u - b_{12}\, v - b_{13}\, w)\, u, \\ -\theta\, v_z = d_2\, v_{zz} + (r_2 - b_{21}\, u - a_2\, v - b_{23}\, w)\, v, \\ -\theta\, w_z = d_3\, w_{zz} + (r_3 - b_{31}\, u - b_{32}\, v - a_3\, w)\, w. \end{cases} \tag{19}$$

境界条件は，図 3 の形状から，次のように設定する．

$$\begin{cases} (u(-\infty), v(-\infty), w(-\infty)) = \left(0, \dfrac{r_2}{a_2}, 0\right), \\ (u(+\infty), v(+\infty), w(+\infty)) = \left(\dfrac{r_1}{a_1}, 0, 0\right). \end{cases} \tag{20}$$

(19), (20) の解 $(u(z),\ v(z),\ w(z))$ と $\theta$ の存在に関する厳密な証明はまだない．ここでは，この

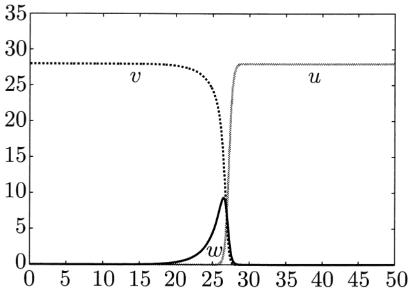



**図 3**　図 2(b) に見られる右向きに進む波の空間プロファイル[1)]．$u(x,t)$（灰色実線），$v(x,t)$（点線），$w(x,t)$（実線）．

問題に対して参考文献 6, 7) の方法を用い，図 3 に見られるような進行波解の厳密解を求めてみよう．ところで，このような問題に対してある程度の予備知識のある読者は (19), (20) の厳密解が得られると聞けば驚かれるのではなかろうか．これから紹介するように，3 種競争–拡散系に対しても解の形を適切に仮定し，Mathematica 等の数学アプリケーションをうまく活用することで厳密解が求まる場合があるのである．まず，簡単のために $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, $r_1 = r_2 = r_3 = r$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ を仮定する．また，この簡単化によって (18) は次のようになる．

$$\frac{1}{b_{21}} < 1 < b_{12}, \tag{21}$$

$$\frac{1}{b_{13}} < 1 < b_{31}, \tag{22}$$

$$\frac{1}{b_{32}}, b_{23} < 1. \tag{23}$$

これらの仮定の下，進行波解として次の形を仮定する．

$$\begin{cases} u(z) = k_1\,(1 + \tanh z), \\ v(z) = k_2\,(1 - \tanh z)^2, \\ w(z) = k_3\,(1 - \tanh^2 z). \end{cases} \tag{24}$$

まず境界条件，

$$\begin{cases} (u(-\infty), v(-\infty), w(-\infty)) = (0, r, 0), \\ (u(+\infty), v(+\infty), w(+\infty)) = (r, 0, 0), \end{cases} \tag{25}$$

より $k_1 = \frac{r}{2}$ および $k_2 = \frac{r}{4}$ がすぐにわかる．Mathematica[8] を利用すると，(24) を式 (19) に代入し，$b_{12}, b_{21}, b_{23}, b_{31}, b_{32}, \theta, k_3$ について解くことができ，次の関係式を得ることができる．

$$b_{12} = \frac{8\,(-1+3\,b_{13})}{r\,(-1+b_{13})},$$
$$b_{21} = \frac{-8-3\,r-24\,b_{13}+3\,r\,b_{13}}{r\,(-1+b_{13})},$$
$$b_{23} = \frac{(-24+r)\,(-1+b_{13})}{16}, \tag{26a}$$
$$b_{31} = \frac{2\,(-r-8\,b_{13}+r\,b_{13})}{r\,(-1+b_{13})},$$
$$b_{32} = \frac{8\,(-1+3\,b_{13})}{r\,(-1+b_{13})},$$
$$\theta = \frac{-4+r+20\,b_{13}-r\,b_{13}}{2\,(-1+b_{13})}, \tag{26b}$$
$$k_3 = \frac{4}{-1+b_{13}}. \tag{26c}$$

(26) において，$r$ および $b_{13}$ が自由パラメータであるが，(19) のパラメータがすべて正であるという条件から次の制限をうける．

$$\frac{16\,b_{13}}{-1+b_{13}} < r < \frac{-8+24\,b_{13}}{-1+b_{13}}, \quad \text{if} \quad 1 < b_{13} \le 3, \tag{27a}$$

$$24 < r < \frac{-8+24\,b_{13}}{-1+b_{13}}, \quad \text{if} \quad 3 < b_{13}. \tag{27b}$$

まとめると，(19), (20) に対して，(26) および (27) の条件の下，進行波解の厳密解 $(u(z), v(z), w(z))$ $(z = x - \theta\,t)$ が次のように表される．

$$\begin{cases} u(z) = \dfrac{r}{2}\,(1+\tanh z), \\ v(z) = \dfrac{r}{4}\,(1-\tanh z)^2, \\ w(z) = \dfrac{4}{-1+b_{13}}\,(1-\tanh^2 z), \end{cases} \tag{28}$$

このとき，速度 $\theta$ は，

$$\theta = \frac{-4+r+20\,b_{13}-r\,b_{13}}{2\,(-1+b_{13})},$$

である．

(26) および (27) を満たすようパラメータを設定し，進行波解の一例を示そう．図 4 は，先のシミュレーションで用いたパラメータを設定した厳密解のプロファイルである．このとき，速度 $\theta$ は負であるから，この進行波解は左方向に進む．先のシミュレーションで得られた右向きに進む進行波らしき波（図 3）と，厳密解として得られた進行波解（図 4）を比較すると，速度の正負が異なり，それらのプロファイルも異なることがわかる．これら異なる 2 つの波の関係はどのようになっているのだろうか．分岐解析ソフトウェア AUTO[3] と，今回得られた厳密解を用いると，この疑問に答えることができる．

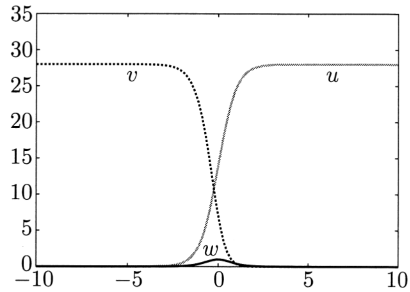



**図 4**　(28) の進行波解の空間プロファイル[1]．$u(z)$（灰色実線），$v(z)$（点線），$w(z)$（実線）．パラメータは $r = 28$, $b_{13} = 4$.

## 4. AUTO を用いた大域的解構造解析

AUTO[3] は境界値問題の解をパラメータを変化させつつ追跡することできるソフトウェアである．境界値問題の解の追跡において必要となる初期値をどのように得るかは，ニュートン法をベースとするアルゴリズムにおいては決定的に重要である．AUTO では，解追跡の初期値設定には幾つかの方法が用意されているが，厳密解ほど確かな初期値はない．実際，今回得られた厳密解を初期値として AUTO を用いて解の追跡を行うことができる（図 5）．図 5 の縦軸は進行波の速度 $\theta$ であり，横軸は分岐パラメータとして用いた $b_{23}$ である．灰色の丸は先に得られた進行波解の厳密解であり，解追跡の初期値である．この分岐図から，厳密解が得られたパラメータにおいて，2 つの異なる進行波解が存在し，厳密解の速度は負であったが，AUTO によって得られたもう一方の解の速度は正

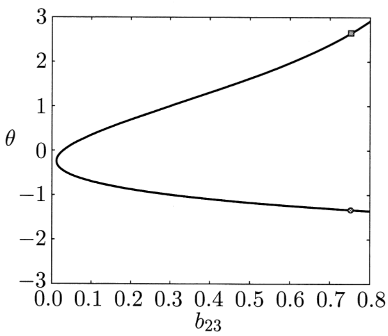



**図 5**　3 種進行波解の大域解構造[1]．灰色の丸は図 4 に対応する進行波解．灰色の四角については本文を参照．

であることがわかる．実際，図 3 と AUTO によって得られた速度が正である進行波解（図中灰色の四角）のプロファイルとほぼ同じであり，それらの速度もほぼ一致する．つまり，先の数値実験にて得られた図 3 の波に対応する進行波解が AUTO によって求まったのである．また，分岐図からは，それら 2 つの解がパラメータ空間において繋がっており，サドルノード分岐によって消滅することもわかる．安定性については，シミュレーションによって AUTO で得られた図 3 に対応する進行波解は安定であり，速度が負の厳密解は不安定であることが示唆される．では，図 2(b) におけるシミュレーションの差異はどのように考えられるだろうか．図 5 において，厳密解 (28) は種 $U, V$ のみからなる進行波解と種 $U, V, W$ からなる進行波解を隔てるセパラトリクス解となっていることが示唆される．即ち，厳密解は不安定であるが，その不安定解における $W$ の振幅は，どの程度の侵入量が種間強弱関係の逆転を引き起こすかという情報を与える．但し，厳密解はいつも不安定であるというわけではなく，参考文献 1) には安定な進行波解の厳密解の例も示されているので参考にしてほしい．

## 5. おわりに

國立台湾大学の Chiun-Chuan Chen 教授，Li-Chang Hung 博士および明治大学の三村昌泰教授との共同研究の成果である参考文献 1) の内容について，その一部を紹介した．論文には Mathematica のコード，より一般的な厳密解，安定な進行波解の厳密解なども紹介しており，興味を持たれた方は一読頂きたい．一般に厳密解を求めることは簡単ではないが，一端それが求まるとシミュレーションからでは得ることが難しい情報，さらには新たな理解や新たな問題意識が得られる場合がある．数理生態学における厳密解の有効性が少しでも伝われば幸いである．

### 参考文献

1) C.-C. Chen, L.-C. Hung, M. Mimura and D. Ueyama, Exact travelling wave solutions of three-species competition-diffusion systems, *DCDS-B*, **17**(8) (2012), 2653–2669.
2) 重定南奈子，『侵入と伝播の数理生態学』，東京大学出版会 (1992).
3) E.J. Doedel, B.E. Oldeman, A.R. Champneys, F. Dercole, T.F. Fairgrieve, Y. Kuznetsov, R.C. Paffenroth, B. Sandstede, X.J. Wang, and C.H. Zhang, "AUTO-07p: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations", Concordia Univ., Version 0.7, 2010. Available from: http://sourceforge.net/projects/auto-07p/files/auto07p/.
4) Y. Kan-on, Traveling waves in systems of two competing species, *Sūgaku*, **49**(4) (1997), 379–392.
5) K. Kishimoto and H.F. Weinberger, The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domains, *J. Differential Equations*, **58**(1) (1985), 15–21.
6) M. Rodrigo and M. Mimura, Exact solutions of a competition-diffusion system, *Hiroshima Math. J.*, **30**(2) (2000), 257–270.
7) M. Rodrigo and M. Mimura, Exact solutions of reaction-diffusion systems and nonlinear wave equations, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **18**(3) (2001), 657–696.
8) Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 7.0, Wolfram Research, Inc., Champain, IL (2008).

（うえやま・だいしん，明治大学大学院先端数理科学研究科）

# 厳密解と計算機



十河　清

## 1. 私の数式処理事始め

計算機上で数式計算ができることを初めて聞いたのは，後藤英一先生による LISP 言語の講義においてでした．LISP で書かれた数式処理系「REDUCE」について，ガンマ行列への応用などが紹介されたのですが，当時は迂闊にも素粒子論に限らず汎用性があることに想い至りませんでした．

量子可積分系の研究で学位を取ったあと，1981 年に駒場の和達三樹先生の研究室に移りました．当時話題になっていたことの一つは，XYZ Heisenberg Spin 模型の可積分性でした．もちろん可積分であることは明らかなのですが，それを Lax–Moser 対の具体的構成によって示したいわけです．当時 Kulish–Sklyanin のプレプリントが届いていて，そこには彼らの得た Lax–Moser 対が書かれていましたが，調べてみるとどうもおかしい．

これは自分たちで独立に求めるしかない，ということになって計算を始めました．結局，未知数が 4 つの（係数が文字式の）線形連立方程式を 3 つほど解く，という問題に帰着することがわかりました．これはいわゆるクラメル公式により，4 次の行列式計算で解けます．今でも覚えているのですが，朝の 10 時頃に計算を始めて終わったのが昼の 2 時頃でした．行列式一つ当り約 16 分ということになります．

論文[1)]を書き終えた後で，当時大学院生だった大熊健司君から REDUCE を使うことを示唆されました．彼は研究会で広田良吾先生からの宣伝を受けたのです．早速に駒場の計算機センターにあった REDUCE 処理系に行列式計算をやらせてみました．マニュアル片手に行列要素を指定して Enter キーを押すと一瞬の沈黙の後にカタカタと結果が出力されて来るではありませんか．その間およそ 2 秒ほどで，私より 500 倍速い．慰めは「私は因数分解までやっていた」ということでしたが，このときが私が数式処理に目覚めた瞬間でした．

それ以来「使えるものは何でも使う」という研究スタイルに変わりました．首尾一貫した証明などは，後からやれば良いのであって，発見することが第一なのです．その後，1988 年に丸善で Mathematica のマニュアル本を見つけ一読して気に入り，直接に Wolfram 社に注文しました．当時 Mathematica が動くのは Macintosh だけでしたので，合わせて Mac Plus も購入するはめになりましたが，これが自前で購入した最初のパソコンでした．

これまで数式処理をいろいろな問題に使ってきましたが，時間を掛ければ自力でもできるけれど，そんな忍耐力がない，というたぐいの計算が多いようです．次節では，私のやった数式処理計算の例を少し紹介しましょう．

## 2. 数式処理の事例

### 2.1 離散的 Frenet–Serret 方程式

空間曲線には動座標系として $(\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b})$ という 3 つ組の直交単位ベクトル系（弧長 $s$ に依存）が付随しています．これらを表すには，F. Klein による表示

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t} &= (a^2+b^2-c^2-d^2,\ 2(ad+bc),\\
&\qquad 2(-ac+bd)),\\
\boldsymbol{n} &= (2(-ad+bc),\ a^2-b^2+c^2-d^2,\\
&\qquad 2(ab+cd)),\\
\boldsymbol{b} &= (2(ac+bd),\ 2(-ab+cd),\\
&\qquad a^2-b^2-c^2+d^2)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

が便利です（$a^2+b^2+c^2+d^2=1$）．こうすると，互いの直交性と単位ベクトル性が自動的に満たされるからですが，この確認は数式処理に絶好の計算です．

さてこのとき Frenet–Serret 方程式（F–S 方程式）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_s &= \kappa \boldsymbol{n} - \delta \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{n}_s &= -\kappa \boldsymbol{t} + \tau \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{b}_s &= \delta \boldsymbol{t} - \tau \boldsymbol{n} \end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つことはよく知られています（添字は $s$ による微分）．けれども，ここに登場する曲率 $\kappa$，捩率 $\tau$ などの幾何学量が

$$\begin{aligned} \kappa &= 2(ad_s - a_s d + b_s c - bc_s), \\ \tau &= 2(ab_s - a_s b + c_s d - cd_s), \\ \delta &= 2(ac_s - a_s c + d_s b - db_s) \end{aligned} \tag{2.3}$$

のように $a, \cdots, d$ を用いて表されることはあまり知られていません（広田良吾，1981）．この結果は「F–S 方程式 (2.2) は $a, \cdots, d$ に関する恒等式である」ということを意味しています．

それ以来，離散的 F–S 方程式があるはずだと確信していましたが，難しくてなかなか発見できません．何度目かのトライアルで，やはり「線形連立方程式を解く」という形にまで帰着させることに成功しました．Mathematica に解かせると，長い時間を掛けて非常に長い出力を返してきました．そこで，魔法の呪文「Simplify[%]」をかけると，ひと呼吸置いて短い出力に変わります．その結果は，式 (2.3) の離散版が

$$\begin{aligned} \kappa_j &= \frac{d_{j+1}a_j - a_{j+1}d_j + b_{j+1}c_j - c_{j+1}b_j}{a_{j+1}a_j + b_{j+1}b_j + c_{j+1}c_j + d_{j+1}d_j}, \\ \tau_j &= \frac{b_{j+1}a_j - a_{j+1}b_j + c_{j+1}d_j - d_{j+1}c_j}{a_{j+1}a_j + b_{j+1}b_j + c_{j+1}c_j + d_{j+1}d_j}, \\ \delta_j &= \frac{c_{j+1}a_j - a_{j+1}c_j + d_{j+1}b_j - b_{j+1}d_j}{a_{j+1}a_j + b_{j+1}b_j + c_{j+1}c_j + d_{j+1}d_j} \end{aligned}$$

というもの．式 (2.2) の離散版は文献 2) にあります．この論文は，離散的 Euler's Elastica という題名になっていますが，実はこの離散的 F–S 方程式の結果を報告する，というのが一番の目的だったのでした．

### 2.2 Solvable Chaos 系

少し趣きの異なった例も紹介しましょう．カオス系でありながら，厳密解を持つような逐次代入の写像系が存在しますが，その特徴は「確率分布が厳密に求まる」という点にあります．特に印象的な例を紹介しましょう[3]．

高木貞治の『近世数学史談』の付録「回顧と展望」には，レムニスケート関数によって正方形から円へ等角写像するという問題を，ヒルベルトに口頭試問されたというエピソードがあります．あるとき，これを使えば「円から円へのカオス写像が作れる」と思いつきました．正方形から正方形へのカオス写像なら「アーノルド写像」という有名なものがあるからです．

実際に数値シミュレーションしてみると，予想通りカオス的挙動を示し，4 つ足のお盆を伏せたような確率分布も得られたのですが，問題はそれからでした．この確率分布の具体的な表式がわからない．あれこれ考えた末に，ある関数形の確率分布に辿り着き，次の等式の成立を示せば良いことがわかりました．それは

$$x = \frac{s_1\sqrt{1-s_2^4}}{1-s_1^2 s_2^2}, \quad y = \frac{s_2\sqrt{1-s_1^4}}{1-s_1^2 s_2^2} \tag{2.4}$$

とするとき

$$\begin{aligned} &(1+(x^2+y^2)^2)^2 - 4(x^2-y^2)^2 \\ &= \left(\frac{1-s_1^4-s_2^4+4s_1^2s_2^2+s_1^4s_2^4}{(1-s_1^2s_2^2)^2}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

が成り立つ，というものです．ここまで煮詰まれば，この種の計算は数式処理の得意とするところで，式 (2.5) を確かめることはすこぶる簡単でした．

## 3. 数式処理ソフト使用上の注意

このように便利な数式処理言語ですが，残念ながら未だに必ずしも「万能」なツールとは言えません．ひどいときは間違った答えを出すことまであるので，注意が必要です．そのため，結果の吟味・検討は必須なのです．計算機には得意・不得意があるので，いろいろな経験を積んで適材適所に使う，というのが最善の利用法ではないでしょうか．

最後に，私自身は Mathematica ユーザーですが，無償の数式処理ソフトとして，Open Source になった REDUCE や Maxima などがあることを付け加えておきます．

### 参考文献


1) K. Sogo and M. Wadati, *Prog. Theor. Phys.* **68** (1982) 85.
2) K. Sogo, *J. Phys. Soc. Jpn* **75** (2006) 064007.
3) K. Sogo and A. Masumizu, *Phys. Lett. A* **375** (2011) 3512.



（そごう・きよし，北里大学理学部）

# 「数理科学」は語る

## 30年前から現代へのメッセージ

高木 隆司

1982年11月号

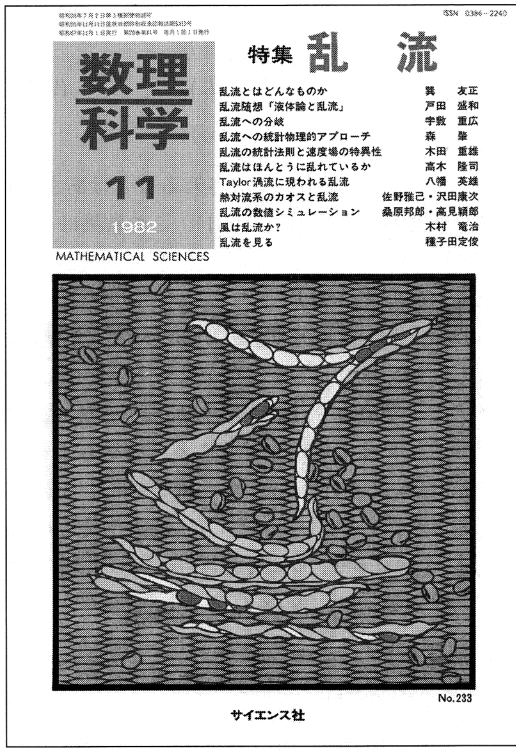
30年前の乱流に対する認識は，それ以前と大きく変化したように思われる．それまでは，乱流を平均流と乱れ成分に分け，後者については微細構造を考えず運動エネルギーなどの平均量を問題にしていた．

ところが，1970年代に噴流や混合層などで可視化実験が行われるようになると，乱雑な流れと思われていた中に，長時間継続する大きな渦が見つかり，それから1980年代にかけて「乱れの中の秩序」というものが強く認識されるようになった．筆者も，この秩序構造を主な研究テーマの一つにしていた．折しも，カオスや熱的非平衡状態で現れる散逸構造のように，乱雑さと秩序が共存するような現象が注目され，流体力学といわゆる物性基礎論の分野が互いに歩み寄るという状況も生まれたようである．

いま思い出してみると，筆者も含めて多くの研究者が，一体「乱れ」とは何か，「秩序」とは何かという基本的な問題は深く追求せず，多彩な現象を追いかけることに熱を挙げていたように思われる（筆者の勝手な感想ではあるが）．現在の乱流研究は，産業界や地球科学などからの要請に応えるために，数値計算によって乱れの様子を詳細に調べることが主流になっているような印象を受ける．それはそれで良いことなのであるが，基本的な問題の追求も忘れないでほしいのである．

1982年11月号の中で，「乱流」とは実は複雑な流れのことであり，その時間発展はナヴィエ・ストークス方程式で一意的に決定できるにも関わらず，乱雑な挙動と見なして解析しようとする研究者の態度を指すのだと指摘した（この考えは，筆者の恩師である今井功先生から影響を受けている）．この考えは今も変わっていない．しかし，その乱流の中に生まれる秩序とは何かを問うと，これは簡単ではない．

一般的に，秩序とは，「大きなスケールをもち，比較的単純な数式，あるいは言葉でその構造が記述できるもの」と思われている．筆者は，さらに「その形や出現場所に安定した再現性がある」という条件も追加したい．「安定した」とは，初期条件のわずかな差に影響されないということである．上記の渦構造や熱対流のセルは，この条件に当てはまる．一方，特定の温度や圧力の下で現れる臨界状態では，分子が長距離にわたって規則的に並ぶような構造が現れる．これも秩序と呼ばれているが，その形や場所に再現性がない．このように再現性の有無で2種類の秩序があるので，それらを第1種，第2種などの形容詞をつけて区別するのがよいかもしれない．




乱れとは何か，秩序とは何かという問いは，筆者にとって永遠の課題のように感じられるのである．

（たかき・りゅうじ，神戸芸術工科大学）

# 素数の発見

## 素数からゼータへの長い旅

黒川 信重

### はじめに．素数とゼータ

ここでは，素数概念の発見から，ゼータ概念への深化の様子を紀元前500年頃の古代ギリシャから現代まで簡略に辿ってみたい．素数の研究は，学問の中で歴史の長いものの代表である数学の中でも，最も古くからのテーマの一つであり，しかも現代の最先端研究へとつながっている．素数の実体は現在でも解明されてはいない．

素数をまとめ上げて研究する方法がゼータであり，具体的には，オイラー（1707年4月15日–1783年9月18日）やリーマン（1826年9月17日–1866年7月20日）が基礎理論を構成した．その後，カシミール（1909年7月15日–2000年5月4日）が，量子力学的カシミール効果の理論値にゼータの繰り込み値

$$“\frac{1}{(1-2)(1-3)(1-5)(1-7)(1-11)\cdots}” = “1+2+3+\cdots” = -\frac{1}{12} \quad (1\,次元),$$

$$“\frac{1}{(1-4)(1-9)(1-25)(1-49)(1-121)\cdots}” = “1+4+9+\cdots” = 0 \quad (2\,次元),$$

$$“\frac{1}{(1-8)(1-27)(1-125)(1-343)(1-1331)\cdots}” = “1+8+27+\cdots” = \frac{1}{120} \quad (3\,次元)$$

等々（ここで，左端は「1 −（素数のべき）の積」，中央は「（自然数のベキ）の和」である）が現れることを示し，ゼータの繰り込み値（ひいては“素数”）が自然界で使われていることが明確になってきた．

素数の問題として有名なものに，数学最高の難問として名高い「リーマン予想」がある．リーマン予想は，通常，ゼータの零点の問題として定式化されるが，実際には素数の問題である．リーマンが1859年11月に提出してから150年が過ぎた現在も残念ながら未解決である．リーマン予想を解こうとする努力の中から数学の数多くの新展開がもたらされたことでも著名である．それは，素数概念の深化・拡大であった．

本稿は日立基礎研究所（鳩山町）の外村彰先生のセミナーにて『オイラー，リーマンからカシミールへ：ゼータ関数からの視点』と題して2011年（昨年）3月7日（月）に行ないました講演原稿を基にしています．外村先生は本年5月2日に残念ながらお亡くなりになりました．「素数」の意義を考察する良い機会を与えてくださいました外村先生に感謝の念を申し上げ，ご冥福をお祈り申し上げます．

2, 3, 7, 43, 13, 53, 5, 6221671, 38709183810571, 139,
2801, 11, 17, 5471, 52662739, 23003, 30693651606209, 37, 1741, 1313797957,
887, 71, 7127, 109, 23,
97, 159227, 643679794963466223081509857, 103, 1079990819,
9539, 3143065813, 29, 3847, 89, 19, 577, 223, 139703, 457,
9649, 61, 4357,
87991098722552272708281251793312351581099392851768893748012603709343,
107, 127, 3313.

## 1. ピタゴラスの頃の素数論

素数概念は2500年ほど昔のギリシャにおいて発見され（ピタゴラス研究所・学校においてであったと考えられる；研究所の置かれた都市名はクロトンであり，現在はイタリア南岸の都市クロトーネとなっている），現代数学に至るまで数学発展の原動力を与え続けている．

素数は数学の根本概念であり，

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \cdots$$

のように，自然数（正の整数）のうちで1より大きな2つの自然数の積に分解できないものを指す：

自然数 → 《分解》 → 素数.

ピタゴラス学派のモットーは『万物は数』であった．この場合の「数」とは自然数を指すが，掛け算に関して分解していけば結局は素数に還元されるということを発見したのである．数を分解するという「素数論」と物を分解するという「原子論」とは互いに関連して生じたのであろう．

ギリシャ数学の偉大な成果は「素数は無限個ある」という発見であり，論理の整然とした証明もきちんと付けている．2500年経った現在から見ても，なぜそんなことが証明できたのか，不思議である．彼らの証明は，実際に素数を作り出すやり方であり「背理法」ではなかった：何個か素数があったら，全部掛けて1を足したものを作り，それを割り切る1でない一番小さい自然数を取り出せば，それは素数であり（素数でなかったとしたらもっと小さいもので割り切れてしまう），しかも新しい素数となっている（それまでの素数では割り切れないので），という作り方である．例えば，素数2からはじめてみると，全部掛けても2のままで，1を足すと3が出る．これを割り切る1でない最小の数は3である．こうして，2の次に3が作れた．2，3からは全部掛けて6，1を足して7が出る．よって，3個の素数2，3，7が出た．次には，全部掛けると42で1を足すと43となり，4個の素数2，3，7，43ができた．その次は，全部掛けると1806，1を足すと1807．これを割り切る1でない最小の自然数は，1807が13と139の積になることから，素数13とわかる．このようにして，5個の素数2，3，7，43，13が得られた．これを続ければ，1個ずつ増えていき，結局，素数が無限個出てくることがわかる．なお，2から開始した場合に，現在までに計算されているのは第47項目までである（上図．43項目までは1990年代に計算済みであったが，第44項の計算が大変で15年余り経った2010年に達成され68桁の素因数が発見された）．

この方法はピタゴラス学派（紀元前500年頃）によるものと思われるが，記録に残っているのはユークリッド『原論』（紀元前300年頃）であるため，「ユークリッド素数列」とよばれている．

●未解決の興味深い問題1●
素数列

2–3–7–43–13–53–5–6221671–38709183810571
–139–2801–11–17–5471–···

に，すべての素数が出てくるだろうか？ 他の素数から出発した

17–2–5–3–7–3571–31–395202571–13–29–137–23–97–···,

99109–2–3–5–7–11–13–···

等ではどうだろうか？

●未解決の興味深い問題 2●

変型版として「それまでの素数を掛け合わせたものに 2 を足し，その最小の素因子を取り出す」によっても，素数を作り出すことができる．例えば，3 からはじめると

3–5–17–257–65537–···

となる．ここに現れているのは有名なフェルマー素数（未だ 5 個しか発見されていない；ガウスが証明したとおり，正多角形の作図はフェルマー素数に関連しており，正 3 角形，正 5 角形，正 17 角形，正 257 角形，正 65537 角形は作図可能）である．ただし，··· に次に現れるのはオイラーが発見した 641 である．この素数の列にはすべての奇素数が現れると思われるが，これもまた，未解決の問題である．

●素因数分解の例●

3 月上旬の十日間のカレンダーの数を素因数分解してみよう．右辺に現れている数はすべて素数となっている．

$301 = 7 \cdot 43,$

$302 = 2 \cdot 151,$

$303 = 3 \cdot 101,$

$304 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19,$

$305 = 5 \cdot 61,$

$306 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17,$

307 = 素数,

$308 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11,$

$309 = 3 \cdot 103,$

$310 = 2 \cdot 5 \cdot 31.$

年号まで付けると 8 桁になるので計算が少し面倒（基になった 2011 年 3 月 7 日の講演にあわせて 2011 年 3 月版）．

20110301 = 素数,

$20110302 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 372413,$

$20110303 = 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 2707,$

$20110304 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 628447,$

$20110305 = 3 \cdot 5 \cdot 1340687,$

$20110306 = 2 \cdot 10055153,$

$20110307 = 7 \cdot 167 \cdot 17203,$

$20110308 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1675859,$

$20110309 = 1777 \cdot 11317,$

$20110310 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 182821.$

●問題　311 と 20110311 を素因数分解せよ．

さて，素数概念は 2500 年も前に抽象的に考えられたのであるが，21 世紀に生きる我々にとっては日々なくてはならないものとなっている．というのは，現代社会のセキュリティの基盤になっているのが，情報伝達の安全性であり，そのために素数が大活躍している．現代社会は素数によって支えられていると言って過言でない．その根本は「素因数分解の難しさ」である．素因数分解は小さい自然数に対しては手計算でも簡単にできるが，大きい自然数になると困難が急激に増大する．逆に，素数の積を計算することは容易である．これが，現代暗号に素数が使われる理由であり，第三者による暗号解読は困難な素因数分解によって阻止されている．代表例は，「何個かの素数」（例：200 ケタくらいの素数 2 個）を掛けてできる「自然数」（例：400 ケタの自然数）を暗号の鍵とする公開鍵暗号である．その鍵となる自然数からもとの素数を求めることはとても困難であり（高速なコンピューターでも数千年を要するはず），安全と考えられている（ただし，現在，理論と実験の両面で研究が進んでいる量子コンピューターが実

現すると，素因数分解の速度は急激に向上し，公開鍵暗号の安全性は危なくなる)．このように，素数は現在の日常生活でもなくてはならないものになっていて，携帯電話や IC カード等の情報通信セキュリティを保証する暗号の鍵は素数となっているのである．

## 2. オイラーと素数とゼータ

素数を発見したギリシャ時代から 2000 年が過ぎた 18 世紀になり，オイラーは素数研究の途上

自然数 →《分解》→ 素数 →《統合》→ ゼータ $\zeta(s)$

の順路でゼータを発見した．式で書くと

$$\sum_n n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1} = \zeta(s)$$

となる．素数に関する無限積は最も重要であり**オイラー積**という．オイラーはゼータを自然数 $n$ 全体に関する和として 1735 年に最初に取り上げ，2 年後に素数 $p$ 全体に関する積となっていることを発見したのである［「ゼータ」という名前や記号「$\zeta(s)$」はリーマンによる］．その結果，オイラーは 1737 年に大発見「素数の逆数全体の和は無限大」を行った．ギリシャ時代に素数が無限個あることが知られて以来 2000 年以上の歳月を経てはじめての進歩がオイラーによって得られたのであった．オイラーが

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots$$

が無限大になることを見抜いたのは，**オイラー積**表示からである．基本的には

『素数の逆数和 $=\log($自然数の逆数和$)$』

という漸近等式（log は自然対数）により素数の逆数和が無限大であることを明らかにしたのである．

ところで，素数の逆数全体の和は無限大というオイラーの定理からすると，素数の逆数を足していくと，理論的には，徐々に 10 を超え，100 を超え，1000 を越え，というようにいくらでも大きくなっていくはずであるが，大きくなるなり方は非常にゆっくりとしていて，実は，最新鋭の計算機を使っても

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\\&+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{1801241230056600467}\\=\ &3.9999999999999999966\cdots,\\&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\\&+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{1801241230056600523}\\=\ &4.0000000000000000021\cdots\end{aligned}$$

程度である．今世紀中に 10 を超えることは無理であろう．

さらに，注目すべきこととして，1748 年にオイラーは発散無限量を上手く計算（繰り込み）し，

$$\begin{aligned}&\text{“}\frac{1}{(1-2)(1-3)(1-5)(1-7)(1-11)\cdots}\text{”}\\&=\text{“}1+2+3+\cdots\text{”}=-\frac{1}{12},\\&\text{“}\frac{1}{(1-4)(1-9)(1-25)(1-49)(1-121)\cdots}\text{”}\\&=\text{“}1+4+9+\cdots\text{”}=0,\\&\text{“}\frac{1}{(1-8)(1-27)(1-125)(1-343)(1-1331)\cdots}\text{”}\\&=\text{“}1+8+27+\cdots\text{”}=\frac{1}{120}\end{aligned}$$

等々の値を求めた．これは，$\zeta(s)$ の $s=-1,-2,-3,\cdots$ における値を計算したことになる．ちょうど 200 年後の 1948 年に，カシミールがカシミール効果の理論値（$d$ 次元なら $\zeta(-d)$ が現れる）に使う準備となっていた．これらの値は，オイラーの約 100 年後に，リーマンが複素関数論を構成して解析接続を行なうことによって再確認している．リーマン予想の観点からすると，オイラーは $\zeta(s)$ の実零点 $s=-2,-4,-6,\cdots$ を発見していたことになり，リーマンが虚零点を考察する端緒を与えていたのである．また，$x$ 以下の素数の個数が $x$ が増大していくにつれて $x/\log x$ に漸近するという「素数定理」の予想は 1760 年にオイラーが提出している．

## 3. リーマンと素数

素数に関するオイラーの研究は，約100年後にリーマンがゼータ $\zeta(s)$ を用いて素数を研究する発端となっている．実際，リーマンの1859年のリーマン予想を提出した論文はゼータの**オイラー積**表示から出発している．リーマンはオイラーの研究を磐石な基礎の上に乗せ，オイラーの諸結果を再確認した．さらに，リーマンは，複素関数としての $\zeta(s)$ を駆使して素数分布を研究し，与えられた数以下の素数の個数を表示する「素数公式」を与えた．それは，素数全体と零点全体との対応関係を示す「明示公式（explicit formula）」の特別の場合となっている．リーマンは素数公式の「誤差項」（「主要項」との差）が最良になるときとして，

**リーマン予想**：リーマンゼータの非実零点の実部は $\frac{1}{2}$

を1859年に提出するに至った（素数分布とリーマン予想との関連は1901年にコッホが簡明にした）．この予想は，数学最大の難問として数多くの挑戦を受け，100万ドルの賞金もかけられているが，150年以上経った今も未解決である．

リーマンの素数研究は，通常，リーマン予想の提出が大きく取り上げられるが，素数と零点との関係（明示公式）を発見したことが重要な点である．明示公式の真の意義が未解明であることがリーマン予想未解決の核心である．

## 4. カシミール効果と素数

カシミールは1948年に真空中に平行に置かれた金属板間に引き付け合う量子力学的力が働くことを導き，理論値として，オイラーやリーマンが求めていた

$$“\frac{1}{(1-2)(1-3)(1-5)(1-7)(1-11)\cdots}”$$
$$= “1+2+3+\cdots” = -\frac{1}{12} \quad (1\text{次元}),$$
$$“\frac{1}{(1-4)(1-9)(1-25)(1-49)(1-121)\cdots}”$$
$$= “1+4+9+\cdots” = 0 \quad (2\text{次元}),$$
$$“\frac{1}{(1-8)(1-27)(1-125)(1-343)(1-1331)\cdots}”$$
$$= “1+8+27+\cdots” = \frac{1}{120} \quad (3\text{次元})$$

を用いることになった（カシミールは，ポアソン和公式を使って繰り込みと正規化を行っているが，ゼータの繰り込みと同値である）．カシミール効果の理論値には $d$ 次元なら $\zeta(-d)$ が現れる．とくに，2次元（一般に，偶数次元）ではカシミールエネルギーは理論的には0である．仮想的な状況として複素数次元 $d$ に対してカシミールエネルギーが考えられたとし，その値が0かどうかが判定できれば $\zeta(-d)$ が0かどうかがわかるであろう．そうであれば，リーマン予想を目にすることになる．

このように，カシミール効果の理論値として現れるゼータ関数の特殊値も，形式的には，素数に関する**オイラー積**によって書き表すことができる．ここに，素数と素粒子の接近が見られる．

## 5. 合同素数

素数を解明するために，20世紀はリーマン予想の研究とゼータの一般化の研究が大規模に行なわれた．とくに，1915年のヒルベルトとポリヤの提言以来「ゼータ零点・極の固有値解釈」（これは，ゼータ関数を行列式表示することと同等）を行うことがリーマン予想の解決へ向けての大きな目標となった．実際，リーマン予想が解決済の第一の場合である「合同ゼータ関数」の場合は，この方針が完成している（文献1) 参照）．

「合同素数」（標数が正の世界の素数）の研究は19世紀よりなされてきたが，その場合のゼータは1919年出版のコルンブルムの研究が最初である．コルンブルム（1890–1914）はゲッチンゲン大学の20代の学生であった1914年に第一次世界大戦にて戦死したため，ランダウが遺稿（学位論文研究）を編纂して出版したのである．1920年代にはアルティンとシュミットにより研究が進み，1933年にハッセが有限体上の楕円曲線の場合にリーマン予想の証明を与えた．一般の代数曲線の場合はヴェイユが1940年代に証明した（詳細の出版は

1948年）．さらに一般の代数多様体の合同ゼータの研究が20世紀の後半の大きなテーマとなった．**オイラー積**は「0次元部分多様体（閉点）」という「合同素数」を“素数”と見た積となる．鍵となったのは1965年に完成されたグロタンディークによる行列式表示（作用素はフロベニウス作用素）である．グロタンディークは，そのために代数幾何学の膨大な書き換えを行なった（空間概念のスキーム論による革新）．その上で，リーマン予想の類似物は1974年にドリーニュにより証明された．ちなみに，ドリーニュは，合同ゼータのリーマン予想からラマヌジャン予想（1916年提出）も導出し，フィールズ賞を得た．グロタンディークのスキーム論は数論の発展に必須の基盤を与え，「ラングランズ予想（非可換類体論予想）」と結びつき，夢であったフェルマー予想の証明（ワイルズ，1995年）と佐藤–テイト予想の証明（テイラー達，2011年）が達成された．

## 6. 幾何素数

20世紀に得られた，リーマン予想の類似が解決済みの第二の場合が「セルバーグゼータ関数」の場合である．この場合もヒルベルトとポリヤの方針が完成している．セルバーグゼータはセルバーグ（1917–2007）の1952年前後の研究で発見された．セルバーグは，ポアソン和公式を非可換群に拡張した「セルバーグ跡公式」を樹立し，

リーマンゼータ関数：明示公式
＝ セルバーグゼータ関数：セルバーグ跡公式

という対応関係を手がかりにセルバーグゼータ関数を発見したのである（文献1）参照）．**オイラー積**は「1次元部分多様体（閉測地線）」という「幾何素数」を“素数”と見た積となる．セルバーグはラプラス作用素による行列式表示を与え，リーマン予想の類似物を証明した．固有関数はマースの波動保型形式である．セルバーグの研究は20世紀の後半に表現論が大発展した基盤を与えている．セルバーグはリーマンゼータの場合にも最良の成果をあげていた．セルバーグこそリーマン予想に最も近づいた数学者と言えよう．

## 7. 素数の深リーマン予想

「リーマン予想は**オイラー積**の影響圏を境界を超えて出来る限り広げることである」とは名著『リーマンゼータ関数』を書いたティッチマーシュの言（同書第3章）である．この言葉は長いあいだ行く道を照らしてくれていたものの，本当のところを探求することの困難さが先に立っていたのが実状である．20世紀にリーマン予想の類似物が解決された場合としては，既に見たように，合同ゼータ（合同素数）とセルバーグゼータ（幾何素数）という二つの場合があった．リーマンゼータやディリクレ$L$など数論的ゼータに対するリーマン予想が第三（そして最後）に解決すべき場合として残っている．最近になって，**オイラー積**をそのまま調べるという，直接的で明快な素数探求方法が，**深リーマン予想**となって甦ってきた．素数に関する**オイラー積**が境界を超えて日の目を見る素数の新時代がやってきた（文献13〜15）参照）．

## 8. 絶対素数

未来への展望については，絶対数学（一元体上の数学）からの視点が有望視されていて，膨大な研究が蓄積され始めている．1995年に出版されたマニンの講義録

Manin, Yuri: Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa). Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). *Asterisque*, No.**228** (1995) 121–163

は，近年『絶対数学』のバイブルとされているが，もともとは，1990年頃のリーマン予想に関するデニンガーと黒川の別々の研究の紹介であった．とくに，絶対数学にとっては，その動機となっている黒川テンソル積（絶対テンソル積）が重要であり，絶対ゼータ関数を黒川テンソル積を用いて構成することが最近コンヌを中心に行なわれている．

リーマン予想解決に向けて重要な基礎体となる

ものは何であるかは長年の課題であった．それに答えるのが，「一元体」である．絶対数学は，すべてのものを一元体 $\boldsymbol{F}_1$ 上で考える数学である．それは，意外にも，もともとは三角関数の研究から出発したものである（文献 2〜7）参照）．『三角の世界』（“The Three Cornered World” とは夏目漱石の名作『草枕』の英訳のタイトルである：通常の四角の世界から常識という一角を取り除いた芸術家の世界を意味している）から深遠な素数が解明されることを期待したい．

### 参考文献案内


1) 黒川信重『リーマン予想の 150 年』岩波書店，2009 年 11 月［リーマン予想の解明に向けた 150 年間の研究，問題点，未来への展望］．
2) 黒川信重「絶対数学の発見」現代思想，青土社，2010 年 9 月号［絶対数学の発見へと至る歴史を概観］．
3) 黒川信重「絶対数学」現代思想，2000 年 10 月増刊号「数学の思考」青土社［絶対数学の初期の記録］．
4) 黒川信重・小山信也『絶対数学』日本評論社，2010 年 9 月［絶対数学の世界初の解説書］．
5) 黒川信重・小山信也『多重三角関数論講義』日本評論社，2010 年 11 月［黒川による 1991 年 4 月–7 月の講義の記録］．
6) 黒川信重「素数・ゼータ関数・三角関数：三つの問題」数学のたのしみ，2006 年 夏号（8 月 25 日発行）8–28［高校生向けの講義の記録］．
7) 黒川信重「三角関数への列車の旅」数理科学，2008 年 7 月号［多重三角関数研究の思い出：2011 年 4 月にサイエンス社刊行の単行本『数学の道しるべ』に再録］．
8) 黒川信重『オイラー探検：無限大の滝と 12 連峰』シュプリンガー・ジャパン，2007 年 10 月［2007 年のオイラー生誕 300 年記念］．
9) 黒川信重『オイラー，リーマン，ラマヌジャン：時空を超えた数学者の接点』岩波書店，2006 年 12 月［数学研究のバトンの受け渡しに注目］．
10) 黒川信重『数学の夢：素数からのひろがり』岩波書店，1998 年［1997 年夏に行った第一回岩波高校生セミナーの記録］．
11) 黒川信重（編），数理科学，2011 年 1 月号特集「数論の探求：ゼータからその世界に迫る」サイエンス社［激流となっている数論の現在］．
12) 黒川信重「オイラー入門」数理科学，2011 年 9 月号特集「オイラー」サイエンス社［オイラーの視線の先］．
13) 黒川信重「素数の問題：一歩先へ」数学セミナー，2012 年 5 月創刊 50 周年記念号［深リーマン予想へ］．
14) 黒川信重『リーマン予想の探求』技術評論社，2012 年刊行予定．
15) 黒川信重『リーマン予想を超えて』東京図書，2013 年春刊行予定．
16) 黒川信重・小山信也『リーマン予想の数理物理：ゼータ関数と分配関数』サイエンス社，SGC 86，2011 年 11 月．


（くろかわ・のぶしげ，東京工業大学大学院理工学研究科）

# 科学と社会
Science & Society

## 第8回　国家・学問・戦争の諸相

# 木村駿吉の経験（3）

### アメリカ留学から第二高等学校教授時代まで

岡本　拓司

第6回より，明治期に活躍した物理学者・技術者の木村駿吉の経験に即して，同時期の物理学を中心とする科学の，日本の内外における動向を検討している．前回は，第一高等中学校を非職となったのちも勉学への思いを募らせていた駿吉がアメリカに留学するまでの経緯や，最初の滞在先のハーヴァード大学の物理学者たちに満足できなかった様子を検討した．今回は，駿吉がハーヴァードを離れて本格的な勉学を開始するようになる時期から見ていくこととしたい．

## 8.1 ギブスとの出会い

前回触れた通り，駿吉は明治26年（1893年）の渡米当初の滞在先としてハーヴァード大学を選んだが，既に研究経験があり，またヨーロッパ式の物理学に親しんで理論・数学志向の強かった駿吉にとって，同大学の物理学者たちは指導を仰ぐに足る存在ではなかった．ハーヴァードの数学者のJ.M.パース（James Mills Peirce, 1834–1906）の四元数の講義はもう1年聴きたかったようだが，私費留学の駿吉に講義一つのためにハーヴァード滞在を延長する余裕はなく，効率よく研究を進め得る環境に移る必要があった．

同時期にドイツに行った長岡半太郎が，ベルリンに見切りをつけるとミュンヘンに移ったように，当時の日本の留学生は学問の先端で最新の成果を吸収しようと努めていた．官費・私費によらず，留学で学び取ってくるものが彼らの母国の将来を左右すると考えていたためである．

物理学研究を志しながら，その先進地域ではないアメリカが留学先である点で，駿吉はすでに不利であったが，最初の滞在先にハーヴァードを選んだのは，それでも同国では最古で最良とされる大学ならば優れた指導者を得られると想像したためであったかもしれない．そのハーヴァードでは不足であるということならば，ハーヴァードに並ぶか次に良いとされる大学が転学先の候補となるのは自然である．駿吉の念頭に浮かんだのはイェールであった．駿吉に東京大学予備門や東京大学・帝国大学で物理学を教えた山川健次郎はイェールのシェフィールド科学校の卒業生であり（ただし土木工学専攻），駿吉と第一高等中学校で同僚であった中島力造はイェールで博士号を取得していた．留学前から，駿吉はイェールに関する知識は有していたものと思われる．

転学を目指す駿吉は，以前ハーヴァードに提出して教師たちから不評を買った自身の論文を，イェールにあらためて送り，奨学金獲得の可能性を探った[1)]．幸運なことに，当時（1894年．以後西洋で

の話題の際には西暦で記す）のイェールには，世界的にみても突出した理論研究の大家であったギブス（Josiah Willard Gibbs, 1839–1903）がいた．駿吉によれば，ギブスは彼の論文を Ph.D. の論文よりよいと評価したという．ただし駿吉は，ギブスは論文を読んだのではなく，目を通した程度のことであろうと考えていた[2)]．

アメリカではイェールが 1861 年に初めて Ph.D. という学位を出していたが，ギブス自身は，1863 年に "The form of the teeth of wheels in spur gearing"（平歯車の歯の形状）という論文で学位を得ている[3)]．物理学に分類されているが，内容は工学に近く，アメリカの Ph. D. としては科学分野では 2 番目，工学分野と看做すとすれば最初のものである[4)]．1894 年までにイェールに提出された Ph.D. 請求のための論文は，物理学ではギブスのものも含めて 11 あり，駿吉の論文と比較することが可能な程度には蓄積があった．

駿吉も，ギブスの名前は，1875 年から 1878 年にかけて発表された，熱力学・物理化学における業績，"On the equilibrium of heterogeneous substances"（不均一系の平衡について）や，ベクトル解析における諸論文によって知っていた．さらに，駿吉がハーヴァードで四元数の講義を聴きながら「熟覧」[5)]したというテイト（Peter Guthrie Tait, 1831–1901）の *An Elementary Treatise on Quaternions* の第三版（Cambridge, 1890）の序文にはギブスへの言及もあった．ただしここでテイトは，1881 年と 1884 年にギブスが私的に刊行した *Elements of Vector Analysis*[6)]を，ハミルトン（William Rowan Hamilton, 1805–1865）とグラスマン（Hermann Grassmann, 1809–1877）の表記法を混同するものとして批判し，ギブスは四元数の進展に対する "retarder"（制動機）であると述べていた．これが，四元数の支持者たちの，イギリスのヘヴィサイド（Oliver Heaviside, 1850–1925）と並ぶベクトル解析の提唱者であるギブスへの評価であった．

## 8.2 四元数とベクトル解析

ギブスの好評価を得て駿吉はイェールに移ることができた．しかし，四元数に傾倒しかけていた駿吉がギブスに師事するというのは，例えばノット（Cargill Gilston Knott, 1856–1922）のような四元数の支持者にとっては，意外に思われたようである．ノットは自身の論文[7)]を駿吉に送り，ギブスと学んでいる駿吉に感想を求めた．これに対し駿吉は，ギブスの「私版」[8)]（*Elements of Vector Analysis* を指す）に一度目を通したのみであり，今一度読まねば正確な評価はできないと考えたが，ベクトル解析は四元数の便利な「個別例」（「パチキュラーケース」）であって，基本的には四元数を支持するものの，用途に応じて便利なベクトル解析も使えばよいと理解していた．例題として，お雇い外国人であったユーイング（James Alfred Ewing, 1855–1935）が考察した，個々の分子を磁石として取り扱う系を，両方の表記法で取り扱ってみようともしていた．駿吉は，英国人（テイトらの四元数）と米国人（ギブスのベクトル解析）の長所のみをとればよいと考えており，両者の間に対立があることは感じていたにしても，ギブスの四元数に対する見解をよく理解することのないままイェールを滞在先に選んだようである．

実際には，四元数派とベクトル解析派の間には，どちらがより優れた表記法であるかをめぐる激しい論争があり，1890 年代前半はその最盛期であった．駿吉は論争の存在には気づいてはいたが，その程度については無頓着であった．

四元数は，複素数が平面上の点に対応することから，3 次元空間でも同様の表現が存在するのではないかと考えたハミルトンが 1843 年に導入した概念である．具体的には 3 次元空間のあるベクトルを他のベクトルに変換する作用素を四元数という[9)]．四元数は数とベクトルの和であり，乗法に関して非可換であるなど，（当時としては）物理学者にとって使いづらい側面もあった．1844 年には，グラスマンが，3 以上の次元を持つ空間にも適用できる同様の方法を考案していた（アウスデー

ヌングスレーレ（Ausdehnungslehre)).

これに対し，ギブスは，電磁気学に必要な表記として，複雑な四元数に代わるベクトル解析を提案し，1881年と1884年に分けて私家版の教科書 *Elements of Vector Analysis* を発表した．ギブスとは独立に，一度は四元数に魅了された経験をもつヘヴィサイドも，具体的に電磁気学に用いるにはベクトル解析のほうが有利であることに気づいており，1888年に至ってギブスの本を得ると，自身の発見との共通性に気づいた[10)]．

1890年代に入ると，四元数を支持するテイト，ノットなどと，ベクトル解析を支持するギブス，ヘヴィサイドなどの間で議論が交わされるようになり，1890年から1894年までの間に，*Nature* のみでも20の関連記事が掲載された[11)]．四元数派は，ベクトル解析が四元数の派生物であると看做していたために論争にも力がこもったようであるが，物理学においてはベクトル解析を活用したギブスやヘヴィサイドの成功が著しかった．ベクトル解析では，実際の電磁気的な物理量に直接対応する表記が設けられている点が便利であり，これもあって，複雑な取扱いの必要な四元数を持ち込むことなく，充分簡便な記述ができる．この時期以降，物理学上の表記としてはベクトル解析が徐々に広い範囲で受け入れられるようになり，四元数は数学上の課題としての色彩を強めていく．

## 8.3 イェール1年目の駿吉

駿吉は，イェールに移った最初の年（1894年–1895年）は，試験は受けずに6つの科目を聴講した[12)]．「光の電磁気学」（Electro-Magnetic Theory of Light），「力学と熱力学」（Dynamics and Thermodynamics），「ベクトル解析の応用」（Application of Vector Analysis），「関数論」（Theory of Function），「置換論」（Substitution Theory），「数論」（Theory of Numbers）がその内訳であり，担当者は，最初の3つはギブス，次の2つは数学者のピアポント（James Pierpont, 1866–1938），最後の数論はフィッシャー（Irving Fisher, 1867–1947）である[13)]．講義はいずれも大学院の「純粋及び応用数学」（Pure and Applied Mathematics）に分類されている．近接の分類には，物理学の含まれる「博物的・物理的科学」（Natural and Physical Science）があるが，この時代のアメリカでは，通常，高度な数学を用いる物理の講義は数学に分類された．

ギブスのベクトル解析や熱力学については，駿吉もある程度予備知識があったが，「光の電磁気学」で波動を複素関数で表示するのには興味を覚えている．この講義は電磁気学の基礎的な講義と交代で隔年で開かれていた．「力学と熱力学」は，ラグランジアンやハミルトニアンなどを用いた，現在の解析力学に相当する部分から始め，J.J. トムソン（Joseph John Thomson, 1856–1940）の *Applications of Dynamics to Physics and Chemistry*[14)] をもとに分子を力学的に扱い，確率論を適用して熱力学の第二法則などを導くというものであった．「ベクトル解析の応用」はベクトル量の関わるポテンシャルや関数を扱い，物理学への応用を特に取り上げている．

ピアポントはウィーンで博士号を取得したばかりの数学者であり，駿吉は「中々の獨風」と評している．彼の「関数論」は複素関数に関わる基本的な概念や方法の習得を目指したものであり，「置換論」は群（groups of substitutions）についての議論と代数方程式を扱う部分からなる．

フィッシャーは経済学の先駆者として知られ，ギブスも彼の博士論文の指導教員の1人であったが，駿吉は特に感想を残していない．

おそらくはイェールに移る前のことであろうが，駿吉は，ハーヴァードと「ボストン・テクノロジー」（Boston Tech と呼ばれたマサチューセッツ工科学校を指す）の教員がボストンで開いた数学・物理学の研究会にも参加している[15)]．駿吉は，関谷清景（1855–1896）から得た報告書やお雇い外国人でもあったイギリス人のミルン（John Milne, 1850–1913）の「古本」（*Earthquakes and Other Earth Movements* (London: Kegan Paul, Trench, & Co., 1886) であろうか）をもとに，日本の地震調

査について発表を行った．質疑の中で，チャールストンの地震に関してアメリカ人の行った観測を，ミルンが信頼できないと評したことに対し，白髪のアメリカ人の学者が顔を赤くして怒るのを，「ストローベリーに砂糖を掛けて沸騰させた」ようだと評している．それにしても，駿吉に限らず，当時の日本人留学生は，ノット，ユーイング，ミルンなど，日本でも教鞭をとった科学者の名を留学先でよく耳にしていたようである．彼らの意識の中では，西洋と日本の間の距離は，それほど大きなものではなかったであろう．

## 8.4 活動の拡大

1895年の講義が終わる頃，駿吉はヨーロッパに出掛けた．知り合った経緯は不明であるが，当時ロンドンにいた南方熊楠と，5月から8月にかけて会っていたことが，南方の日記から分かる[16]．ロンドンでは初め南方が美術館や博物館を案内したが，両者は次第に意気投合し，羽目を外すようにもなった．その後も駿吉は南方の許をしばしば訪れているために，いつのことかは明らかではないが，二人とも食物を買えないほど貧しかったにも関わらずビールを買って飲み明かし，小便の不始末で下宿の主婦の怒りを買ったこともあったと南方は回想している[17]．

駿吉の訪欧はロンドンのみを目的としたものではなかった．ロンドンから大陸に渡った駿吉は，オランダの数学者モーレンブルック（Pieter Molenbroek, 1861–？）に会い，1年ほど前から構想するようになっていた，四元数に関する国際的な学会の設立についての相談を行った[18]．その結果，経営全般は駿吉が，文書関係はモーレンブルックが担当して準備を行う旨が計画され，さらに英独の研究者から協力についての約束も取り付けることができた．駿吉によれば，ギブスも協力すると述べたようである．

1895年10月以降，駿吉の四元数関係の活動は一気に表面化した．*Science*，*Nature*，『東洋学芸雑誌』などに，モーレンブルックと駿吉を発起人とする国際四元数協会（International Association for promoting the Study of Quaternions and allied systems of Mathematics）設立の声明文[19]が掲載され，また演算子のナブラの四元数への拡張を取り上げた駿吉の論文[20]も刊行された．無名の日本人大学院生が国際学会設立を呼びかけたとみるとやや奇異な感も否めないが，既に見たとおり，欧米の科学者の多くを知り，また1年間の滞米で自分の能力の程度も理解した駿吉にとっては，あまり違和感のない行動だったのではないだろうか．

四元数協会設立呼びかけの意図は，長文の寄稿を許された『東洋学芸雑誌』掲載の文章が詳細に伝えている．駿吉は，グラスマンのアウスデーヌングスレーレは純粋数学に属し，ベクトル解析は物理学の用途に特化しすぎていると判断していたが，四元法では個々の方程式にも物理的意味が含まれていると感じていた．四元法にはすぐに応用できる部分もあるがそうでない部分もあるという批判に対しては，数学には「ピユーア」の部分と「アツプライド」の部分があり，両者が相携えて進むものであると反論している．それならば，数学の一課題として研究に値すると明言すれば却って理解し易かったようにも思われるが，駿吉は，四元法は，物理学においても，単なる便利な数学，便利な表記法としての役割を越える意義をもつのではないかと考えていたようである．一方で，その意義がどのようなものであるのか具体的に示すことはできなかった．

解決すべき物理学上の課題がないまま四元数に傾倒していった駿吉の様子には，現在の視点からすると理解しがたい部分もある．しかし，四元数協会設立呼びかけの２カ月後に起こるエックス線の発見や，翌年に起こる放射能の発見によって，物理学が新たな段階に入る以前の情況の一端を物語る事例であるようにも思われる．なお，エックス線の発見については，長岡がドイツから急遽送った報告がやはり『東洋学芸雑誌』に掲載され，相前後して，帝国大学，第一高等学校，第三高等学校などでも追試が実施された[21]．これに対して，四元数に関しては，日本では目立った動きは起こら

なかったように思われる．

四元数に関する活動で始まった，1895年から1896年に至る学年は，駿吉は多忙であった．この年は聴講のみで済ませるわけにはいかず，講義を履修して単位を得る必要があった．駿吉がとったことが確認される講義は，ギブスの「熱力学」(Thermodynamics)，「電気と磁気」(Electricity and Magnetism)，「マルティプル・アルジェブラ」(Multiple Algebra)，およびピアポントの「楕円関数論」(Theory of Elliptic Functions) であり[22]，いずれも前年度の講義同様，大学院の "Pure and Applied Mathematics" に分類されている[23]．「熱力学」は熱力学の基礎法則から化学平衡，物質の性質の説明に至る講義であり，「電気と磁気」では，マックスウェルの教科書[24]に基づいてベクトル解析の利用法が講じられる．「マルティプル・アルジェブラ」はアウスデーヌングスレーレや行列の代数を扱い，ベクトルの代数や四元数に知識をもつ学生を対象としている．

「マルティプル・アルジェブラ」については，ギブスは，米国科学振興協会で1886年に行った講演において詳細を論じている[25]．そこでは，複素数の代数がダブル・アルジェブラ (double algebra)，四元数の代数がトリプル・アルジェブラ (triple algebra) と呼ばれており，さらに進んでアウスデーヌングスレーレなども取り上げられている．数学上の課題としてであれば，ギブスもこれらに強い関心を寄せていたことが分かる．

最終的に駿吉が試験を受けたのは，ギブスの3つの講義のみであり，成績は，「熱力学」が fair，「電気と磁気」が good，「マルティプル・アルジェブラ」が fair であった．最上の excellent はないが，2科目が fair であり，悪い成績ではない．

試験を受けて単位を取得したのは，この年で博士号を得て修了するためであった．博士号取得のためには学位請求論文の提出が必要であり，駿吉は「一般的な球面関数の研究」(Studies on General Spherical Functions)[26]という題目の論文をギブスの指導の下で完成させた．内容は，物理学でも良く使われる球面調和関数を，ラプラス方程式からやや離れて一般化し，その特徴を調べるというものである．駿吉は，当初，四元数によって通常の球面調和関数を扱おうとしたが，四元数の特徴がほとんどこの課題に関わらないことに気づき，ギブスの承認も得て，スカラー量に限った議論を行うことにした．そして，四元数による扱いを諦める代わりに，対象には通常の球面調和関数より一般的なものを設定したのである．前書きの日付は1896年3月16日であり，3月半ばには論文は完成していた．

## 8.5 第二高等学校教授へ

イェールで博士号を取得した駿吉は，ハーヴァードで1年，イェールで2年，計3年の留学を終えて帰国した．帰国すると，第一高等中学校を非職となった際の校長であった木下広次（明治26年(1893年）より30年（1897年）まで文部省専門学務局長）が，駿吉のかつての同僚の中島を遣わして，第二高等学校（二高）の教授となることを勧めた．駿吉の回想では，そこで明治30年に赴任したという[27]．不敬事件の当事者の内村鑑三はともかく，駿吉については，木下もいずれは名誉の回復を行わなければならないと考えていたのであろうか．

なお，実際に駿吉に辞令が出たのは，前年明治29年（1896年）9月のことであった[28]．このことと関連して注意を引くのが，前述の南方の日記中の，明治29年12月から翌年3月に至るまで木村という人物（校訂者は「木村俊吉」（ママ）と同定している）が，ロンドンの南方をたびたび訪問していたことを示す記事[29]である．内容は具体的であり，以下のような記述が含まれている．「午下，博物館へ行く．途上細井氏を訪ふ．木村氏も居れり」（明治29年12月22日)．「夜木村氏を（博物館帰途）訪，不在．昨夜巴里より着すとの事」(明治30年1月18日)．「同氏巴里不在中，村上厚（同氏方に留守番せる壮士）女郎家にて乱妨等の難件を語らる」（明治30年1月19日)．「木村氏もあり，同氏より女 (Hellen) にやる文認めやり，加藤

氏とつれ散歩し帰る」（同1月29日）.「午後木村氏を訪ふ．同氏飯ひまどる間に，余，氏の酒を多くのむ」（同2月6日）.「予，木村のオーバーコートのポケトにへど吐込み帰る」（同3月13日）.

木村なる人物がパリとロンドンを行き来しながら南方と交流した様子が窺え，この木村が駿吉であれば興味深いが，当該時期の南方の日記には「木村」という姓が現れるのみで，名前が特定できない．また，以下で述べるように，明治29年12月については，駿吉が仙台にいたことを示す資料がある．南方と木村の交流が親密であったことは間違いなく，上述の日記記事に見られるような交歓もいかにも両者の間のもののように思われるが，明治29年12月から翌年3月の間の南方の日記に現れる「木村」の記述については，取扱いに注意が必要なように思われる．

二高では駿吉は物理・力学を教え，理学科の主任も務めた[30]．内村の不敬事件の直後の明治24年（1891年）1月，仙台では，内村支持の東北学院に対抗する演説会が第二高等中学校の生徒によって開催されていた[31]が，駿吉の二高赴任時に不敬事件のことが想起された様子はない．教授就任の3カ月後の明治29年12月12日には，駿吉は，3年前から開催されていた科学部の例会において，"Marvelous Invention of Nicola [sic] Tesla"と題する，アメリカで活動していたセルビア人の技術者・科学者のテスラ（Nikola Tesla, 1856–1943）の発明についての講演を行い，その後檄文を朗読したという[32]．内容の詳細は不明であるが，帰国直後，赴任直後の意気込みが感じられる．

また，二高の科学部では，明治29年からニュートン祭を行うようになり，ここにも木村が他の教師とともに出席している（12月25日）[33]．ニュートン祭とは，明治14年（1881年）に東京大学理学部数学物理学及び星学科の第一期生が始めた催しで，ニュートン（Isaac Newton, 1642–1727．ただしユリウス暦）の（ユリウス暦での）誕生日12月25日に1年の失敗を振り返るものである[34]．その後東京から各地へと広まっていったが，二高で始まったのは駿吉が赴任した年であった．駿吉の関与があったとも想像される．

## 8.6 二高同盟休校事件

平穏な教員生活は，しかし，長くは続かなかった．駿吉赴任から半年ほど後の明治30年3月，二高で同盟休校（ストライキ，ただし生徒の）事件[35]が発生したためである．

事件の直接の原因は，生徒の遊郭通いを警察に注意された学校が，警察の特定した大学予科の生徒を除名した（2月19日）ところ，翌日になって医学部生が名前を騙って登楼していたことが判明し，学校が除名を取り消し，さらに名誉回復の措置をとった（2月23日）という出来事であった．

初期の高等（中）学校には，卒業後帝国大学へ進まず社会に出る者のために，医学部・工学部などが設置されていた．硬派で知られた校風は大学予科生のものであり，半社会人の医学部生徒には乱れた生活態度の者もあったようである．二高でも，医学部生と大学予科生の間には反目があった．また，当時の二高校長（初代）の吉村寅太郎（1848–1917）は，謹厳実直ではあったが，自治寮を設けて校風の確立を目指した第一高等中学校校長時代の木下のような剛毅さはなく，特に東京の中学校からやってきた生徒たちはこれにあきたらないものを感じていた．一方で，学校側には，明治27年（1894年）にも無実の罪（窃盗）で生徒を退校させ，のちにこれを取り消したという前歴があり，警察の通告を鵜呑みにするばかりで生徒を守ろうとしないという疑念も生じさせていた．

処分を受けた生徒の同級生たちは，委員会を設けて吉村校長に意見書を送り釈明を求めたが，吉村は明確に返事をしなかった．そこで生徒側は，さらに校長の答弁を求めて，3月6日から同盟休校を開始し，8日までには動きは予科生全体に広がった．10日には医学部生もこれに加わった．

二高の同盟休校では，学校に非があるのが明らかであり，新聞などの論調も生徒側に同情的であった．そのため解決は困難であり，県会議長や仙台市長，在京の卒業生なども仲裁に乗り出したが不

調に終わり，結局，文部省から専門学務局長の木下が仙台まで解決に出向くこととなった．当時の高校生全般に慕われるところのあった木下が，公正な処置をとると約束したこともあって，同盟休校は 3 月 15 日には中止となり，22 日には生徒に停学 2 週間の処分が下された．ただしこの 2 週間には休校期間も含まれたので，生徒側には大きな損害はなかった．一方，吉村は，翌月 8 日に文部省参事官となって二高を離れた．

事件の余波は教員にも及び，9 名が二高を去った．校長に殉じた者，学校の不正を嫌った者，騒動を嫌った者など様々であったようである．駿吉はこの事件の後も二高にとどまったが，後に海軍に転出する際には晴れ晴れとした気持ちであったというから，学校勤務はもはや堪え難くなっていたのであろう．明治十六年事件で生徒として処分を受け，内村の不敬事件で教職を失った経験のある駿吉は，二高側に失望を，生徒側に同情を感じていたのではないかと思われる．

駿吉もよく知る木下が重要な役割を果たしてはいるが，駿吉自身が同盟休校事件そのものに関与したことを示す資料は見当たらない．しかし，同盟休校に参加した生徒が卒業後に東京帝国大学に入学しようとした際，成績が良かったにも関わらず授業時間不足を理由に断られると，駿吉は入学前の夏休み（当時は 9 月より新学年）に補講を実施して救済措置をとったという[36]．休暇を棒に振ったとも，1 週間でお茶を濁した[37]ともいうが，明治十六年事件の際，半年に及ぶ退学期間がありながら卒業を許された駿吉が，今度は教師として生徒を救済する側にまわった．

## 8.7 二高時代の執筆活動など

二高時代の駿吉は，留学前にも劣らぬ旺盛な執筆活動を行っている．留学前に内田老鶴圃から出版した『新編物理学』，『新編小物理学』，『新編中物理学』などが版を重ねていたが，新たに，電磁波やエックス線・陰極線，テスラの交流に関する研究の成果などを盛り込んだ『磁気及電気』第 1–3 冊（内田老鶴圃，1898 年），博士論文の成果を反映させた『スフェリカル・ハルモニックス講義』（大日本図書，1898 年）などを出版した．

二高の科学部の講演や，『磁気及電気』でも触れられているテスラにはよほど関心を抱いたらしく，明治 31 年には『天地人』という雑誌に彼の発明について論じた文章[38]を発表した．モーターやダイナモなどの発明，高周波・高電圧の発生，電気による照明の改良などを紹介する他，テスラの夢であった無線送電システムについても触れている．駿吉は，偉大な電気学者でありながら質素な生活を送るテスラの姿勢にも感銘を受けていた．

四元数についても，やはり明治 31 年の『天地人』に紹介の記事を書いている[39]．すぐに馴染めない部分はあるものの，四元数が 3 次元を扱うのにもっとも適した数学であるとの主張は変わっておらず，研究を続ける意志が窺われる．この前年には，駿吉述，二高の数学教授の波木井九十郎編輯の『四元法講義　第一巻　緒論』が内田老鶴圃より刊行されており[40]，包括的な教科書・解説書の刊行も目指されていたようである．この本は，二高で有志に対して行われていた講義をもとにしたものであり，第一巻はベクトルを扱うのみで終わる．明治 30 年 4 月の日付のある前書きには，2 カ月後に 2 冊目が刊行される予定である旨が記されているが，実現しなかった．さすがに内容が高度すぎたのであろうか．

四元数自体は，20 世紀に入って物理学が新たな段階を迎えると，展開の兆しを見せるようになる．1912 年には，シルバーシュタイン（Ludwik Silberstein, 1872–1948）が，四元数（実際には複四元数（biquaternions））を用いて特殊相対性理論を表記する試みを発表した[41]．ただし，すぐに第一次世界大戦が始まり，駿吉たちの始めた国際四元数協会の活動は途絶えざるを得なかった[42]．

いずれにせよ，特殊相対性理論が発表された当時（1905 年 6 月）の駿吉は，これを詳しく検討する心境にはなかったであろう．このときの彼の関心は，おそらくは，同じ年の 5 月の日本海海戦で使われた，自身の手で開発した無線電信機に集中

していたと思われる．

今回は駿吉のイェールでの経験と二高での生活を紹介した．次回は教員生活を離れて無線電信に関わった時期以降の生涯について解説する．今回も杉本恭一氏にご教示を賜った．

### 参考文献


1) 「在米理学士木村駿吉氏ノ書状」,『学士会月報』, 第 82 号（1894 年），23–29 ページ．
2) 前掲[1]，「在米理学士木村駿吉氏ノ書状」，26 ページ．
3) Yale University, *Doctors of Philosophy of Yale University with the titles of Their Dissertations: 1861–1927* (New Haven: Yale University, 1927).
4) Lynde Phelps Wheeler, *Josiah Willard Gibbs: The History of a Great Mind* (New Haven: Yale University Press, 1962), p.32.
5) 前掲[1]，「在米理学士木村駿吉氏ノ書状」，22 ページ．
6) Josiah Willard Gibbs, "Elements of Vector Analysis, Arranged for the Use of Students in Physics," in *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs*, 2vols. (New York: Dover, 1961), vol.II, pp.17–90.
7) Cargill Gilston Knott, "Recent Innovations in Vector Theory" (read December 19, 1892), *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **19** (1893), pp.212–237.
8) 前掲[1]，「在米理学士木村駿吉氏ノ書状」，26 ページ．
9) Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis* (Notre Dame and London: University of Notre Dame Press, 1967).
10) *Ibid.*, p.162–163.
11) *Ibid.*, p.215.
12) Graduate School Student Records (RU262), Manuscripts and Archives, Yale University Library.
13) *Catalogue of Yale University, 1894–95* (New Haven: The Tuttle, Morehouse, & Taylor Press, 1894), pp.215–220.
14) J.J. Thomson, *Applications of Dynamics to Physics and Chemistry* (London: Macmillan, 1888).
15) 前掲[1]「在米理学士木村駿吉氏ノ書状」, 28–29 ページ．
16) 『南方熊楠日記　1』（八坂書房，1987 年），370–379 ページ．
17) 南方熊楠「履歴書」，岩村忍編『南方熊楠文集 1』（平凡社，1979 年），3–71 ページ．
18) 木村駿吉「廻文に添へて東洋学芸雑誌記者足下に一書を寄す」,『東洋学芸雑誌』，**12** 巻 170 号（1895 年 11 月 25 日），555–561 ページ．
19) S. Kimura and P. Molenbroek, "Friends and Fellow Workers in Quaternions," *Nature*, **52** (1895), pp.545–546; *idem*, "To Those Interested in Quaternions and Allied Systems of Mathematics," *Science*, $2^{\mathrm{nd}}$ Ser., **2** (1895), pp.524–525; および，木村，前掲[18]，「廻文に添へて東洋学芸雑誌記者足下に一書を寄す」．
20) Shunkichi Kimura, "On the Nabla of Quaternions," *Annals of Mathematics*, **10** (1895–1896), pp.127–155.
21) 板倉聖宣・木村東作・八木江里『長岡半太郎伝』（朝日新聞社，1973 年），199–203 ページ．
22) *Op. cit.*, n.12, Graduate School Student Records (RU262), Manuscripts and Archives, Yale University Library.
23) *Catalogue of Yale University, 1895–96* (New Haven: The Tuttle, Morehouse, & Taylor Press, 1895), pp.222–226.
24) James Clerk Maxwell, *An Elementary Treatise on Electricity and Magnetism* (Oxford: Clarendon Press, 1873, 1881, 1892), 2 vols.
25) Josiah Willard Gibbs, "On Multiple Algebra," in *op. cit.*, n.6, *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs*, vol.II, pp.91–117.
26) Shunkichi Kimura, "Studies on General Spherical Functions," Ph.D. dissertation submitted to Yale University, 1896.
27) 木村駿吉「懐旧談」,『道』, **288** 号（1932 年 6 月 1 日），31–40 ページ．
28) 伊澤平八郎「木村駿吉のことについて」,『キリスト教史学』，36 集（1982 年 12 月），49–58 ページ．
29) 前掲[16]，『南方熊楠日記　1』，386 ページ．『南方熊楠日記　2』（八坂書房，1987 年），6–11 ページ．
30) 第二高等学校史編集委員会『第二高等学校史』（第二高等学校尚志同窓会，1979 年），135 ページ．
31) 第二高等学校史編集委員会，前掲[30]，『第二高等学校史』，90–92 ページ．
32) 菊地純一郎編輯・発行『創立二十五年記念号』（尚史会雑誌）（第二高等学校尚志会，1912 年），36 ページ．
33) 第二高等学校史編集委員会，前掲[30]，『第二高等学校史』，470 ページ．
34) 板倉他，前掲[21]，『長岡半太郎伝』，142 ページ．
35) 第二高等学校史編集委員会，前掲[30]，『第二高等学校史』，113–135 ページ．
36) 石渡信太郎先生記念事業委員会編・発行『石渡信太郎先生を偲ぶ』（1986 年），177 ページ．
37) 阿刀田令造『二高を語る』（第二高等学校共済部，1937 年），115–116 ページ．
38) 木村駿吉「ニコラ，テスラと電気応用」,『天地人』, **4** 号（1898 年 4 月 2 日），80–86 ページ．
39) 木村駿吉「四元法の過去と現在」,『天地人』, **6** 号（1898 年 6 月 2 日），79–89 ページ．
40) 公田藏「日本の数学教育とベクトル　この百二十五年」,『数理解析研究所講究録』, **1317** 巻（2003 年），190–204 ページ．
41) Ludwik Silberstein, "Quaternionic Form of Relativity," *Philosophical Magazine*, **23** (1912), pp.790–809.
42) Dirk J. Struik, *A Concise History of Mathematics* (London: G. Bell and Sons Ltd, 1956), p.265.


（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

# システムと時系列の情報幾何


甘利 俊一


時間の流れに従って発生する信号を時系列と呼ぶ．時系列が確率に従って発生する場合，これを確率過程と呼ぶ．これまで，統計的推論では独立で同一の確率分布から生み出されるデータを主に扱ってきた．時系列では，時間をまたいだ相関のある過程を研究の対象とする．情報幾何の不変な幾何構造は，時系列に適用できる．そこで，時系列を定める確率分布族，確率過程の族の幾何学を論じよう．

入力時系列を出力時系列に変換するシステムを考えよう．ここに白色ガウス雑音を入力して，システムの出力時系列の性質を調べれば，システムの性質がわかる．だから，時系列の性質はこれを生成する線形システムの性質でもある．ここからシステムの情報幾何が作れる．線形システムは制御理論の根幹をなすから，ここから制御システムの情報幾何を作ることも可能である．同じ考えで，非線形のシステムも扱える．ニューラルネットワークはこの例である．

本稿では一番簡単な，線形1入力1出力，定常で安定な離散時間システムとその生成する時系列を扱う．これを一般化することもできる．

## 18.1 定常時系列，線形システム，フーリエ成分

いま，離散時間の1次元時系列 $\boldsymbol{X} = \{X_t\}$ を考えよう．$t$ は時間で，とりあえず無限時系列 $t = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ とする．一番単純な時系列は，各 $t$ で独立なガウス分布に従う時系列 $\{\varepsilon_t\}$ である．すなわち，$E[\varepsilon_t] = 0$ で，

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t'}] = 0, \quad t \neq t', \quad E[\varepsilon_t^2] = 1 \tag{18.1}$$

これを白色ガウス雑音と言う．

1入力1出力の線形システム（図18.1）は，現在の出力 $x_t$ が，入力信号 $\{u_t\}$

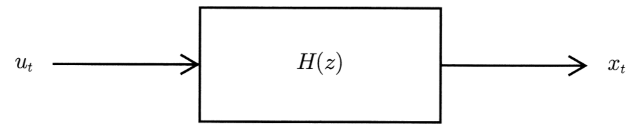



図 18.1　線形システムと伝達関数.

の現在および過去の値の 1 次結合で決まるもので，この入出力関係を

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \varepsilon_{t-i} \tag{18.2}$$

のように書く．このとき，システムの性質を決めるパラメータは $\boldsymbol{h} = \{h_0, h_1, h_2, \cdots\}$ で，無限個ある．ここで，$\sum h_i^2 < \infty$ を仮定しよう．このとき，入力に白色雑音 $\{\varepsilon_t\}$ を入れると，システムは出力から定常時系列 $\{x_t\}$ を発生する．$x_t$ の期待値は $E[x_t] = 0$，その 2 乗平均は $E\left[x_t^2\right] = \sum h_i^2$ だから，これが収束する必要がある．

ここで，新しい記号を導入しよう．時間をずらす演算子を $z$ として

$$z x_t = x_{t+1}, \quad z^{-1} x_t = x_{t-1} \tag{18.3}$$

のように使う．こうすれば，線形システムは伝達関数と呼ばれる

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i} \tag{18.4}$$

を使って，$x_t = H(z) u_t$ のように書ける．$H(z)$ を複素変数 $z$ の関数と見て，$|z| \geq 1$ の範囲で解析的な関数と考える．

定常時系列 $\{x_t\}$ に対して，次の広義のフーリエ変換を施すと

$$X(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2T}} \sum_{t=-T}^{T} x_t e^{-i\omega t} \tag{18.5}$$

のように，これを周波数 $\omega$ の関数 $X(\omega)$ で表せる．これは複素数である．時系列は確率変数であるから，$X(\omega)$ も確率変数であり，その絶対値の 2 乗をパワースペクトラムと呼ぶ．このとき，

$$S(\omega) = |X(\omega)|^2 = \left|H\left(e^{i\omega}\right)\right|^2. \tag{18.6}$$

この場合，$X(\omega)$ の位相がランダムで，$-\pi \leq \omega \leq \pi$ の一様分布になる．

定常システムの出力として得られる時系列の場合，

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log S(\omega)| \, d\omega < \infty \tag{18.7}$$

が成立する．ここではもう少し強い

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log S(\omega)|^2 \, d\omega < \infty \tag{18.8}$$

を仮定しよう．

定常システムの伝達関数 $H(z)$ が与えられれば，このシステムが発生する時系列は (18.8) のパワースペクトラムを持つ．逆に，(18.6) のパワースペクトラム $S(\omega)$ を持つ定常時系列 $\{x_t\}$ が与えられた場合，これを発生するシステム

$H(z)$ が存在する．しかし，このようなシステムは多数存在し，一意ではない．この中で，複素数 $z$ の単位円の外部（$|z| > 1$）で $H(z) \neq 0$ のものは，一意に決まる．これを最小位相システムと言う．最小位相システムの範囲で考えれば，定常時系列 $\{x_t\}$，遷移関数 $H(z)$，パワースペクトラム $S(\omega)$ の 3 者が 1 対 1 で対応している．この空間を $L$ と書く．これは無限次元の空間であるから，その位相を論ずるのに注意を要する．収束などの議論には位相が必要である．しかし，本稿ではその点に深入りしないで，素朴に考える．これから扱う，有限次元のパラメータで決まる時系列に対してはこれで良い．

なお，最小位相システムしか扱わないのは不十分であるという指摘もあろう．これを克服するには，入力信号 $\{\varepsilon_t\}$ を白色ガウス時系列とするのではなくて，白色の非ガウス的な時系列とすればよい．ガウス系列は，2 次のモーメントですべてが決まるが，非ガウス的ならば高次のキュミュラントが現れ，これで非最小位相システムの位相特性が表現できる．

## 18.2 有限次元の時系列空間

有限個のパラメータで指定される時系列を考える．ここでその典型的な例を挙げておこう．

**AR モデル：**白色ガウス雑音 $\{\varepsilon_t\}$ から，次の回帰式

$$a_0 x_t = -\sum_{i=1}^{p} a_i x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad a_0 \neq 0 \tag{18.9}$$

によって逐次生成される時系列を $p$ 次の自己回帰モデル（AR モデル；auto-regression model）と呼ぶ．時間 $t$ の $x_t$ は，過去 $p$ 個の $x_{t-i}$ の線形結合に，イノベーションと呼ぶ新しい独立な確率変数 $\varepsilon_t$ が加わったものと考える．このとき，伝達関数は

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{p} a_i z^{-i}}, \tag{18.10}$$

パワースペクトラムは

$$S(\omega; \boldsymbol{a}) = \left| \sum_{t=0}^{p} a_t e^{i\omega t} \right|^{-2} \tag{18.11}$$

で与えられる．

$p$ 次の自己回帰モデルを指定するパラメータは $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_p)$ であり，これを AR モデルの空間の座標系とすることができる．

**MA モデル：**時間 $t$ の $x_t$ の値が，過去 $q$ 個の独立なガウス雑音の 1 次結合

$$x_t = \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_{t-i} \tag{18.12}$$

で表せるモデルを，$q$ 次の移動平均モデル（MA モデル；moving average model）と呼ぶ．このシステムの伝達関数は

$$H(z) = \sum_{i=1}^{q} b_i z^{-i}, \tag{18.13}$$

パワースペクトラムは

$$S(\omega; \boldsymbol{b}) = \left| \sum_{t=1}^{q} b_t e^{i\omega t} \right|^2 \tag{18.14}$$

である．これを指定するパラメータ（座標系）は $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_q)$ である．

**ARMA** モデル：$(p, q)$ 次の自己回帰移動平均モデルは，

$$x_t = -\sum_{i=1}^{p} a_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_{t-i} \tag{18.15}$$

のように表せる時系列である．その伝達関数は

$$H(z) = \frac{\sum_{i=1}^{q} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{p} a_i z^{-i}} \tag{18.16}$$

である．ここで不定性を除くために $a_0 = 1$ とおいた．パワースペクトラムは

$$S(\omega; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left| \frac{\sum b_t e^{i\omega t}}{\sum a_t e^{i\omega t}} \right|^2 \tag{18.17}$$

である．このシステムは，(18.16) でわかるように $z^{-1}$ の有理関数で表せる．これは離散時間の制御理論で良く用いられる．連続時間では，$z$ が微分演算子 $s = d/dt$ になり，システムの入出力は微分方程式 $x(t) = H(s)u(t)$ で表せる．その性質も，情報幾何で同様に扱うことができる．

## 18.3 時系列空間（システム空間）の情報幾何構造

話を無限次元時系列空間 $L$ に戻して，この空間にリーマン計量と双対接続を導入しよう．まず，時系列 $\{x_t\}$ のフーリエ変換 (18.5) に着目する．これは平均 0 のガウス分布に従う確率変数の和であるから，平均 0 のガウス分布に従う複素数の確率変数である．ところで $\omega \neq \omega'$ のときは $X(\omega)$ と $X(\omega')$ が漸近的に独立になることが，定常性からわかる．したがって $X(\omega)$ と $X(\omega')$ の相関は

$$E\left[X(\omega) X(\omega')\right] = S(\omega) \delta(\omega - \omega') \tag{18.18}$$

を満たす．$X(\omega)$ は複素数であるから，これを大きさと位相にわけて

$$X(\omega) = |X(\omega)| \exp\{i\phi(\omega)\} \tag{18.19}$$

と置く．このとき確率変数 $\{X(\omega)\}$ の確率分布を

$$p(X; S) \approx \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|X(\omega)|^2}{S(\omega)} d\omega - \psi(S) \right\} \tag{18.20}$$

のように書いてみよう．これは形式的なもので厳密な話ではないが，これをもとに自然に $L$ に幾何を導入することができる．ただし，$S(\omega)$ は関数であり，(18.20) は無限次元の分布であるから，厳密性に欠ける点に目をつぶる．

この分布は，(18.20) から自然パラメータを $\theta(\omega) = S^{-1}(\omega)$ とし，期待値パ

ラメータを

$$\eta(\omega) = -\frac{1}{2}E\left[|X(\omega)|^2\right] = -\frac{1}{2}S(\omega) \tag{18.21}$$

とする指数型分布族,

$$p(x;\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int \theta(\omega)\,|X(\omega)|^2\,d\omega - \psi(\theta)\right\} \tag{18.22}$$

であることがわかる.

(18.22) からわかるように, $e$ アファイン座標系は $\theta(\omega)$, これに双対な $m$ アファイン座標系は $\eta(\omega)$ である. ポテンシャル関数と双対ポテンシャル関数は, 定数 $\pi/2$ を便宜上付加して,

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2}\int \log S(\omega) - \frac{\pi}{2}, \tag{18.23}$$

$$\varphi(\eta) = -\frac{1}{2}\int \log S(\omega)d\omega - \frac{\pi}{2} \tag{18.24}$$

であり, これらは

$$\psi(\theta) + \varphi(\eta) - \int \theta(\omega)\eta(\omega)d\omega = 0 \tag{18.25}$$

を満たす.

リーマン計量を定める Fisher 情報行列は, $\theta$ 座標系で

$$g\left(\omega,\omega'\right) = \frac{\partial^2}{\partial\theta(\omega)\partial\theta\left(\omega'\right)}\psi(\theta) \tag{18.26}$$

であるが, これは

$$g\left(\omega,\omega'\right) = \frac{1}{2}S^2(\omega)\delta\left(\omega-\omega'\right) \tag{18.27}$$

となりこの座標系で対角化されている. $\theta(\omega)$ の変化分 $\delta\theta(\omega)$ の長さの 2 乗は

$$\|\delta\theta(\omega)\|^2 = \frac{1}{2}\int S^2(\omega)\left\{\delta\theta(\omega)\right\}^2 d\omega, \tag{18.28}$$

これを $S$ で表せば

$$\|\delta S(\omega)\|^2 = \frac{1}{2}\int \frac{\left\{\delta S(\omega)\right\}^2}{S^2(\omega)}d\omega = \frac{1}{2}\int \left\{\delta \log S(\omega)\right\}^2 d\omega \tag{18.29}$$

となる. ここからわかるように, これはユークリッド計量にほかならない.

2 つのシステム（時系列）のパワースペクトラム $S_1(\omega)$ と $S_2(\omega)$ の間の KL ダイバージェンス $(\alpha=-1)$ は

$$KL\left[S_1:S_2\right] = D_{-1}\left[S_1:S_2\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{S_1}{S_2} - 1 - \log\frac{S_1}{S_2}\right)d\omega, \tag{18.30}$$

Shannon のエントロピーは, スケールと定数を無視すれば, 双対ポテンシャルを負にしたもので,

$$H_S = \frac{1}{4\pi}\int \log S(\omega)d\omega + \frac{1}{2}\log(2\pi e). \tag{18.31}$$

## 18.4 システムと時系列空間の $\alpha$ 幾何学

システムと時系列の空間 $L$ に $\alpha$ 幾何学を導入しよう. これは, 双対平坦な

幾何学で，3 次テンソル

$$T(\omega, \omega', \omega'') = \frac{\partial^3}{\partial\theta(\omega)\partial\theta(\omega')\partial\theta(\omega'')}\psi(\theta) \tag{18.32}$$

の代わりに $\alpha T$ を用いて，$\alpha$ 接続を定義すればよい．

確率分布 (18.22) を良く見ると，これは $\omega$ 毎に独立な確率変数 $X(\omega)$ のなす 1 次元の分布を直積したものである．1 次元の空間は，いかなる $\alpha$ についても曲率は 0 であるから，これを直積した空間も，すべての $\alpha$ について $\alpha$ 接続は平坦な空間を定義する．これをきちんと証明しておこう．

**定理 18.1**　システム（時系列）の空間 $L$ はユークリッド計量を持ち，いかなる $\alpha$ についても，$\alpha$ 接続は平坦である．

これは，通常の確率分布の空間，例えば離散分布の族の空間 $S_n$ にはない，面白い特徴である．正値行列の空間もこの特性を持つし，正測度の空間 $\boldsymbol{R}_+^n$ も同様である．まず $\alpha$ 表現から始めよう．パワースペクトラム $S$ の $\alpha$ 表現を

$$R^{(\alpha)}(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha}S(\omega)^{-\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ \log S(\omega), & \alpha = 0 \end{cases} \tag{18.33}$$

で定義する．ここで $\omega$ 軸での基底関数

$$e_0(\omega) = 1, \quad e_t(\omega) = 2\cos\omega t, \quad t = 1, 2, \cdots \tag{18.34}$$

を定義し，これを用いて $R^{(\alpha)}(\omega)$ を展開する，

$$R^{(\alpha)}(\omega) = \sum_{t=0}^{\infty} c_t^{(\alpha)} e_t(\omega). \tag{18.35}$$

展開係数は

$$c_t^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R^{(\alpha)}(\omega) e_t(\omega) d\omega, \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{18.36}$$

と書ける．

$\alpha$ を固定して，$c_t^{(\alpha)}$ を座標系として，空間 $L$ の諸量を計算する．計量は

$$g_{ij}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\partial_i \log S)(\partial_j \log S)\, d\omega, \tag{18.37}$$

$\alpha$ 接続の係数は

$$\Gamma_{ij,k}^{(\alpha)}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\partial_i\partial_j \log S - \alpha\partial_i \log S \partial_j \log S)(\partial_k \log S)\, d\omega \tag{18.38}$$

のように表せる．ところで，

$$\partial_i R^{(\alpha)}(\omega; \xi) = S^{-\alpha}\partial_i \log S, \tag{18.39}$$

$$\partial_i\partial_j R^{\alpha}(\omega; \xi) = S^{-\alpha}\left\{\partial_i\partial_j \log S - \alpha\partial_i \log S \partial_j \log S\right\} \tag{18.40}$$

が成立することに注目する．座標系として $c_t^{(\alpha)}$ を用いれば，$\partial_i\partial_j R^{(\alpha)} = 0$ であるから，

$$\Gamma_{ij,k}^{(\alpha)}\left(\boldsymbol{c}^{(\alpha)}\right) = 0 \tag{18.41}$$

が得られる．すなわち，$c_t^{(\alpha)}$ 座標で表現すると，$\alpha$ アファイン接続の係数はすべて 0 になる．これは $L$ が $\alpha$ 平坦で，そのときのアファイン座標系が $c_t^{(\alpha)}$ であることを示している．

とくに，$\alpha=0$ の場合は，接続は Levi–Civita 接続となり，0 アファイン座標系は $\log S(\omega)$ を

$$\log S(\omega)=\sum c_t^{(0)} e_t^{(\omega)} \tag{18.42}$$

と展開したときの係数 $c_t^{(0)}$ である．もちろん関数表現を用いて，$\log S(\omega)$ 自体がアファイン座標系と考えてよい．このときのリーマン計量が (18.29) である．

$\alpha$ ダイバージェンスは

$$D^{(\alpha)}\left(S_1\|S_2\right)=\psi^{(\alpha)}\left(S_1\right)+\psi^{(\alpha)}\left(S_2\right)-\sum_{t=0}^{\infty} c_t^{(\alpha)}\left(S_1\right) c_t^{(-\alpha)}\left(S_2\right)$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\alpha^2}\displaystyle\int\left\{\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\alpha}-1-\alpha\log\frac{S_2}{S_1}\right\}d\omega, & \alpha\neq 0 \\ \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\left(\log S_2-\log S_1\right)^2 d\omega, & \alpha=0 \end{cases} \tag{18.43}$$

である．

これらの結果は，$\alpha=\pm 1$ とすれば，前節のものに帰着する．

## 18.5 自己相関係数，逆相関係数

ここで特に，$-1$ アファイン座標（$m$ 座標）$c_t^{(-1)}$ を調べておく．定常時系列 $\{x_t\}$ の自己相関係数 $r_0, r_1, r_2, \cdots$ は $r_s=E\left[x_t x_{t+s}\right]$ で定義される．もちろんこれは $t$ によらず，$s$ だけ離れた $x_t$，すなわち $x_t$ と $x_{t+s}$ 間の相関である．時系列の理論で良く知られているように自己相関係数は，パワースペクトラムを

$$S(\omega)=\sum_{t=-\infty}^{\infty} r_t e^{-i\omega t} \tag{18.44}$$

と展開したときの係数である．逆に，自己相関係数からパワースペクトラムが (18.44) で作れる．これをみると，系列 $c_t^{(-1)}$ と $r_t$ は定数を除いて一致している．したがって，自己相関係数 $r_t$ は $L$ の $m$ アファイン座標系をなす．

同様な議論が $e$ アファイン座標系 $c_t^{(1)}$ についてもいえる．いま，システム $H(z)$ の逆システム $\tilde{H}(z)=H^{-1}(z)$ を考えよう．これは，$H(z)$ の出力時系列を入力に与えると，入力時系列を出力するシステムである．このシステムに白色ガウス系列を入力したとき，出力時系列のパワースペクトラムは $\tilde{S}(\omega)=S^{-1}(\omega)$ であり，自己相関の係数は $\tilde{r}_t=c_t^{(1)}$ である．

## 18.6 AR モデルの幾何学

$p$ 次 AR モデル $AR(p)$ の全体は，AR パラメータ $\boldsymbol{a}=\left(a_0, a_1, \cdots, a_p\right)$ で定まる有限次元のモデルである．明らかに低次のモデルは高次のモデルに含まれ

るから，

$$AR(0) \subset AR(1) \subset \cdots \subset AR(p) \subset \cdots \tag{18.45}$$

という，空間の包含関係がある．

$AR(p)$ のパワースペクトラム (18.11) は

$$S^{-1}(\omega; \boldsymbol{a}) = \sum_{t=0}^{p} c_t^{(1)} e_t(\omega) \tag{18.46}$$

のように有限和に展開できる．すなわち，$AR(p)$ はシステム空間 $L$ において，$e$ アファイン座標が

$$c_{p+1}^{(1)} = c_{p+2}^{(1)} = \cdots = 0 \tag{18.47}$$

のように線形に束縛された空間である．したがって，$AR(p)$ は指数型分布族をなし，双対平坦である．特に $AR(p)$ の $L$ における $e$ 埋込曲率は 0 である．

$AR(p)$ の自己相関系列を $r_0, r_1, r_2, \cdots$ とすれば，それは AR パラメータ $\boldsymbol{a}$ で決まる．$(r_0, r_1, \cdots, r_p)$ は，AR モデルの $m$ アファイン座標系をなす．しかし，それ以上の次数の自己相関係数 $r_{p+1}, r_{p+2}, \cdots$ は 0 ではなくて，$(r_0, \cdots, r_p)$ の関数になっている．

$L$ の中に，パワースペクトラム $S(\omega)$ を持つ時系列もしくはシステムが与えられたとしよう．これを $AR(p)$ で近似する問題を考える．近似の基準として KL ダイバージェンスを用いて，$AR(p)$ に属するシステム $\bar{S}(\omega; \boldsymbol{a})$ で $KL[S : \bar{S}]$ を最小にするものを求める．これを $\bar{S}^*$ とおく．これは，

$$E\left[\left(x_t + \bar{a}_1 x_{t-1} + \cdots + \bar{a}_p x_{t-p}\right)^2\right] \longrightarrow \min \tag{18.48}$$

を最小にする係数 $\boldsymbol{a}$ を求めることに等しい．

この解は自己相関係数を用いると簡単に得られる．いま，$S$ の自己相関係数を $\boldsymbol{r} = (r_0, r_1, r_2, \cdots)$ としよう．最適な近似は，$S$ を $L$ の $e$ 平坦な部分空間 $AR(p)$ に $m$ 射影することで得られる．$AR(p)$ は $L$ の中で $e$ 平坦であるから，この射影は一意である．この点の $m$ アファイン座標を $\bar{\boldsymbol{r}}^* = (\bar{r}_0^*, \bar{r}_1^*, \cdots)$ としよう．両者を結ぶ $m$ 測地線は，双対座標系で $\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}^*$ である（図 18.2）．その

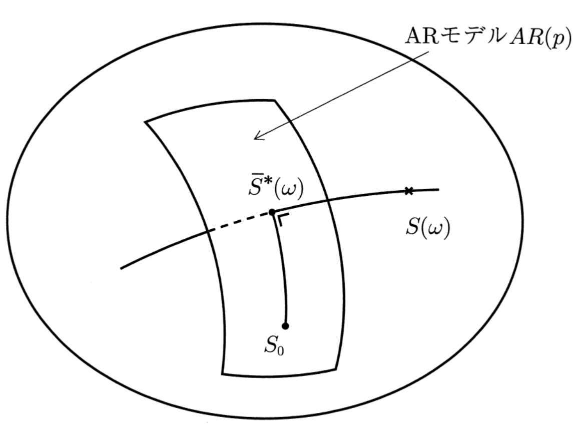



図 18.2　$S(\omega)$ の $AR(p)$ による確率実現と最大エントロピー原理．

接ベクトルは $(r_i - r_i^*)\,\partial^i$ と書ける．一方，部分多様体 $AR(p)$ の接ベクトルは，$e$ アファイン座標系の自然基底で，$\{\partial_0, \partial_1, \cdots, \partial_p\}$ で張られる．$\bar{S}^*$ では $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^*$ が $AR(p)$ の接ベクトルと直交する．$\{\partial_i\}$ と $\{\partial^i\}$ は互いに直交するから，ここから $\bar{r}_i^* = r_i$，$i = 0, 1, \cdots, p$，が得られる．すなわち，$S(\omega)$ を近似する最適な $p$ 次 AR モデルは，自己相関係数が $p$ 次まで一致する AR システムに他ならない．また，エントロピーを最大にする確率実現は，AR モデルによる実現 $\bar{S}^*$ であることがわかる．これが，最大エントロピー原理である．

## 18.7 MA モデルの幾何学

$q$ 次 MA モデルは (18.12) で与えられ，$m$ 平坦であるから，同時に $e$ 平坦になるが，指数型分布族ではない．$L$ の中で，$m$ 埋込曲率は 0 であるが，$e$ 埋込曲率は 0 ではない．AR システムの逆システムは MA モデルであり，議論は AR モデルの場合と平行に進む．

与えられたシステム $S(\omega)$ を，MA モデルを使って近似する問題を考えよう．近似の基準として KL ダイバージェンスを用いれば，$S$ を $MA(q)$ に $m$ 射影したものが最適である．ただ，射影は一意とは限らない．ここでは，KL ダイバージェンスの双対，つまり $\alpha = 1$ ダイバージェンス

$$KL\left[\bar{S} : S\right] = D_1\left[S : \bar{S}\right] = 2H_S\left(\bar{S}\right) + \text{const.} \tag{18.49}$$

を最小にする MA モデルを考える．システム $S(\omega)$ の逆確率実現を MA モデルで行えば，多くの逆確率実現の中でエントロピーを最小にするものが得られる．これは最大エントロピー原理の双対で，最小エントロピー原理と呼んでもよい．

## 18.8 ARMA モデルについて

(18.15) で与えられる，$(p, q)$ 次の ARMA モデルは，$e$ 平坦でも $m$ 平坦でもなく，曲がっている．しかし，ARMA モデルの伝達関数で，分母を固定して分子を自由に動かす部分モデルは $m$ 平坦である．一方，分子を固定して，分母を自由に動かせば，$e$ 平坦なモデルが得られる．

ところで，ARMA モデルの空間は，特異点を含むことに注意しなければならない．ARMA モデルを (18.16) の形で書いたときに，伝達関数の分子と分母が共通の因子を持つ場合がある．このとき両者は約分によって消える．これは ARMA パラメータ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が一意に決まらない，もしくはパラメータが同定可能でない場合があることを意味する．簡単な例でこれを示そう．

いま，(1, 1) 次の ARMA モデル

$$x_t = ax_{t-1} + \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \tag{18.50}$$

$$x_t = \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}}\varepsilon_t \tag{18.51}$$

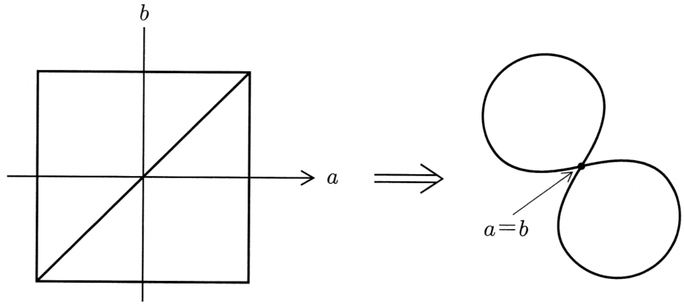



図 18.3　$ARMA(1,1)$ モデルと特異点（線）$a=b$.

を考える．この場合パラメータは $(a,b)$ の 2 次元である．安定性の制約から，$a,b$ の範囲は $|a|<1$，$|b|<1$ に限られる（図 18.3 左）．しかし，$(a,b)$ の 2 次元空間で $a=b$ を満たす対角線上では，伝達関数は約分されて $a=b$ の値に関係なく同一の $H=1$ となる（特異線）．

そこで，同じシステムは同一であるという同値類を導入して，同値のものを一つにまとめれば，この ARMA モデルの空間は 2 つにわかれ，それを一点（特異点）でつないだ形になる（図 18.3 右）．

一般の ARMA モデル，さらに有理多項式で表されるシステムの空間で，常にこのようなことが起こる．こうしてシステムがいくつかの部分に分離することを示したのは R. Brockett であった[1]．しかし，彼はこれが低次の部分でつながり，複雑な階層的モデルをなすことを見ていないのは残念である．

## 終わりの一言

時系列は確率過程であるから，その族に対して統計学の立場で不変な情報幾何構造を導入することができる．ところで，定常時系列は線形システムに白色雑音を入力することで実現できる．もっとも，相関が異常に長く尾を引く場合は，べき法則の世界になる．線形システムの全体の幾何構造を，同じ立場から導入することができる．これを通じて，制御理論の世界に情報幾何が導入できる．今回はその基本だけを述べた．非線形システムも含めて，今後の発展が期待できる．

### 参考文献

1) R. Brockett, Some geometric questions in the theory of linear systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **21**, 449–455, 1976.
2) S. Amari, Differential geometry of a parametric family of invertible linear systems—Riemannian metric, dual affine connections and divergence, *Mathematical Systems theory*, **20**, 53–82, 1987.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

## 特　集 (2012年12月号予告)

# 〈振動する〉物理

**周期的運動で自然の姿を捉える**

本体952円

| | |
|---|---|
| 振動とは何か | 出口　哲生 |
| バネと振り子の振動 | 鈴木　康夫 |
| 振動と波動 | 松野　好雅 |
| 熱伝導と統計力学 | 齊藤　圭司 |
| 生命システムの振動現象とミクロ・マクロリンク | 郡　宏 |
| 1次元量子系と振動 | 工藤　和恵 |
| ソリトンの共鳴 | 戸田　晃一 |
| 振動と場の量子論 | 風間　洋一 |
| 運動する弦と振動 | 伊藤　克司 |
| [コラム] | 渡辺　慎介 |

## 特　集 (2012年10月号)

# 超弦理論の数理

**最先端の数学が拓く新たな自然像**

本体952円

| | |
|---|---|
| 巻頭言 | 大栗　博司 |
| 場の理論の分解学 | 山崎　雅人 |
| 4次元ゲージ理論と2次元共形場理論 AGT予想の数学的背景 | 中島　啓 |
| 混成弦・II型弦双対性の一側面 | 立川　裕二 |
| M-理論とメンブレーンの力学 | 細道　和夫 |
| 超弦理論が教える繰り込み群とタイムマシンの関係 | 中山　優 |
| F-理論の数理　素粒子模型の記述に関連して | 渡利　泰山 |
| 量子ダイログ関数と団代数 | 中西　知樹 |
| カタラン数から弦理論のミラー対称に迫る | 村瀬　元彦 |
| [コラム] 超弦理論のさし示す新しい幾何学 | 江口　徹 |
| [編集部一問一答] 弦理論と数学の関係 | 大栗　博司 |
| 《連載》 大学院入試問題からみた大学の数学　その2 | 海老原　円<br>太田　雅人 |
| 情報幾何の新展開　その17 | 甘利　俊一 |

# 編集後記

微分方程式は具体的に解を導出するのが難しい，と思われる方もいるのではないかと思います．ただ,「厳密解」という言葉がある以上，やはり解の真の姿に迫りたいというのが，人間の性なのだと思います．

特集中では厳密解によって，現象のどんなことがわかるかなど，解説していただいております．厳密解が映し出す自然の姿をご覧いただければ幸いです．(R)

＊　＊

今回の特集では様々な分野における，厳密解に関する話題を解説していただきました．

微分方程式には簡単に解けないものが多いのですが，各記事内ではそれを解くためのアイデアと，厳密解が得られた後の有用性についても触れられています．

岡本久先生の記事中の「砂の中のきれいな貝殻」という文章は，そのことを表現しているのかなと感じました．(T)


**数　理　科　学　11月号**

2012年11月1日発行

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

発行人 木　下　敏　孝

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

発行所 © 株式会社 サ イ エ ン ス 社　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)





印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁